

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования

"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Институт физики

Кафедра «Техническая физика и энергетика»



Иовлева Ольга Вячеславовна, Ларионов Виктор Михайлович,  
Митрофанов Георгий Алексеевич

Теория термоакустических колебаний газа  
Конспект лекций

Казань, 2014

**Направление:** 16.04.01 «Техническая физика»

**Название учебного плана:** не предусмотрено

**Дисциплина:** «Теория термоакустических колебаний» (магистр, 1 курс, очное обучение)

**Количество часов:** 108 ч. (в том числе: 16 лекции, 38 практики, 54 самостоятельная работа), форма контроля: экзамен.

**Темы:** 1. Введение. Примеры самовозбуждения звука в системах с тепловыми источниками. 2. Продольные колебания газа в системах с продольным градиентом температуры. 3. Теоретические модели термоакустических колебаний газа. 4. Теория явления Рийке. 5. Возбуждение звука в неравномерно нагретом резонаторе Гельмгольца. 6. Расчет Эффекта Зондхаусса. 7. Термоакустические колебания газа в канале с переменным тепловым сопротивлением.

**Аннотация:** Данный предмет способствует формированию у обучающихся знаний и навыков по методам решения задач и физическим механизмов возбуждения термоавтоколебаний в акустических резонаторах. В работе приведены регламент бально-рейтинговой системы дисциплины, список основных терминов курса и примерное тестовое задание текущего контроля. Электронный курс предназначен для работы на занятии и самостоятельно, поможет он и отстающим.

**Ключевые слова:** горение, колебания газа, условия возбуждения, амплитуда.

**Автор курса:** Иовлева Ольга Вячеславовна, к.т.н., ассистент кафедры технической физики и энергетики, e-mail: [Olga.Beloded@kpfu.ru](mailto:Olga.Beloded@kpfu.ru), Ларионов Виктор Михайлович, д.т.н., профессор кафедры технической физики и энергетики, тел.: 233-70-54, e-mail: [Olga.Beloded@kpfu.ru](mailto:Olga.Beloded@kpfu.ru), Митрофанов Георгий Алексеевич, к.т.н., доцент кафедры технической физики и энергетики, тел.: 233-70-54, e-mail: [Olga.Beloded@kpfu.ru](mailto:Olga.Beloded@kpfu.ru)

**Дата начала эксплуатации:** 1 сентября 2015 года

**URL курса:** <http://tulpar.kfu.ru/course/view.php?id=2385>

## Оглавление

Тема 1. Введение. Примеры самовозбуждения звука в системах с тепловыми источниками.	4
Тема 2. Продольные колебания газа в системах с продольным градиентом температуры.	21
Тема 3. Теоретические модели термоакустических колебаний газа.	35
Тема 4. Теория явления Рийке.	48
Тема 5. Возбуждение звука в неравномерно нагретом резонаторе Гельмгольца.	61
Тема 6. Расчет Эффекта Зондхаусса.	72
Тема 7. Термоакустические колебания газа в канале с переменным тепловым сопротивлением.	92
Информационные источники	
Глоссарий	
Вопросы к экзамену	

## **Тема 1. Введение. Примеры самовозбуждения звука в системах с тепловыми источниками**

### **Лекция 1**

**Аннотация:** Первая глава имеет вводный характер, в ней содержится общее понятие вибрационного горения как автоколебательного процесса. Приведены некоторые примеры из истории открытия данного явления и описано некоторое применение на практике.

**Ключевые слова:** пламя, емкость, труба, горение, топливо, резонатор.

#### **Методические рекомендации по изучению темы**

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления о предмете;
- В качестве самостоятельной работы нужно подготовиться к устному опросу;
- Для проверки усвоения темы имеются вопросы к каждой лекции.

#### **Литература**

Автоколебания газа в установке с горением. В.М. Ларионов, Р.Г. Зарипов / Изд-во казан. гос. техн. ун-та, 2003. С. 9-11, 12-14, 15-26.

#### **Глоссарий**

**Автоколебания** — незатухающие колебания в диссипативной динамической системе с нелинейной обратной связью, поддерживающиеся за счёт энергии постоянного, то есть неперiodического внешнего воздействия.

**Акустический импеданс** - акустическое сопротивление среды, представляющее собой отношение комплексных амплитуд звукового давления к колебательной объёмной скорости.

**Граничные условия** — дополнение к основному условию, задающее его поведение на границе рассматриваемой области.

**Горение** — сложный физико-химический процесс превращения исходных веществ в продукты сгорания в ходе экзотермических реакций, сопровождающийся интенсивным выделением тепла. Химическая энергия, запасённая в компонентах исходной смеси, может выделяться также в виде

теплового излучения и света. Светящаяся зона называется фронтом пламени или просто пламенем.

**Звуковая энергия** - энергия колебаний частиц среды, переносящей звуковые волны; единица измерения в Международной системе единиц (СИ) — джоуль (Дж).

**Поток акустической мощности** — величина, равная отношению звуковой энергии, переносимой упругой средой через заданную поверхность, к интервалу времени, за который эта энергия переносится.

**Температура горения** – это температура до которой в процессе горения нагреваются продукты сгорания.

**Вопросы для изучения:**

1. Что такое вибрационное горение.
2. Какие установки вибрационного горения Вы можете назвать.
3. Приведите пример вибрационного горения.
4. Классификация вибрационного горения.
5. Отрицательные и положительные стороны вибрационного горения.

**1.1 Примеры самовозбуждения звука в системах с тепловыми источниками.**

В 1777 г. Хиггинс провел следующий опыт. В вертикально расположенную, открытую на концах трубу длиной около 1 м, внутренним диаметром 30–50 мм было помещено диффузионное водородное пламя (рис. 1.1, а). Горючий газ подавался по трубке диаметром в несколько миллиметров, имеющей сужение на конце с выходным отверстием диаметром  $\approx 1$  мм. При некоторых условиях происходило самовозбуждение звуковых колебаний с частотой, близкой к наименьшей собственной частоте колебаний воздуха в трубе, открытой на концах. Наиболее интенсивные колебания имели место, когда пламя располагалось в средней части трубы–резонатора.

Существенное значение имеет длина газоподающей трубки. При ее непрерывном изменении интервалы, при которых происходит самовозбуждение

звука, чередуются с интервалами, когда колебания отсутствуют. Более поздние исследования показали, что явление зависит также от условий на входе в газоподающую трубку, то есть подача водорода происходит из емкости или через большое гидравлическое сопротивление, например, через клапан.

Явление наблюдается и в том случае, когда по трубке подается предварительно подготовленная смесь горючего газа с воздухом.

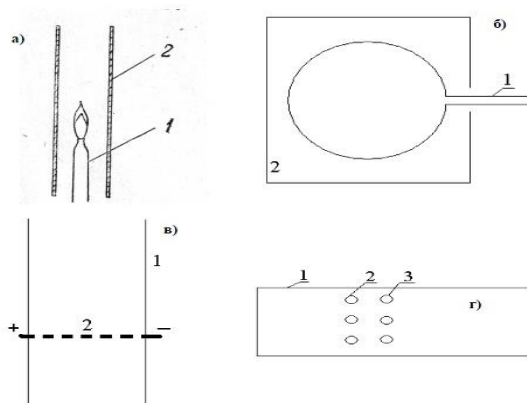


Рис. 1.1. а – поющее пламя Хиггинса

1 – горелка, 2 – труба-резонатор;

б – неравномерно нагретый резонатор Гельмгольца: 1 – резонатор Гельмгольца,

2 – печь; в – труба Рийке: 1 – труба, 2 – сетка; г – установка Зондхауса: 1 –

труба, 2 – нагреватель, 3 – охладитель

Влияние газоподающей трубки можно исключить, подавая горючий газ через капиллярную трубку. Было обнаружено, что если по трубке подавать водород и образующееся диффузионное пламя расположить в нижней половине трубы-резонатора, происходит самовозбуждение звука, причем амплитуда колебаний максимальна, когда пламя расположено на расстоянии, равном четверти длины трубы от нижнего конца.

Еще в средние века стеклодувы наблюдали следующее явление. Если через стеклянную трубу продуть воздух, то на её конце, расположенном в печи, образуется раскаленная сферическая полость (рис. 1.1, б). При определенных размерах трубки и полости происходило самовозбуждение звука. Такое устройство, состоящее из емкости и узкой трубы, длина которой намного

меньше длины звуковой волны, называется резонатором Гельмгольца. Воздух в трубке – «горле» резонатора, может совершать собственные колебания, частота которых зависит от геометрических параметров устройства. Самовозбуждение колебаний связано с разницей температуры стенок емкости и горла, причем градиент температуры на входе в горло должен быть выше некоторого минимального значения.

В 1859 г. Пауль Рийке обнаружил следующее: если в вертикально расположенную трубу длиной 0.8 м поместить на расстоянии примерно 0.2 м от нижнего конца раскаленную проволочную сетку, нагреваемую электрическим током, в трубе происходит самовозбуждение звуковых колебаний (рис. 1.1, в). Впоследствии этот эффект наблюдали многие исследователи, которые использовали различные нагревательные элементы – решетки, кольца, всевозможные спирали. Явление обладает рядом свойств. Для возбуждения колебаний, соответствующих первой гармонике, необходимо располагать нагретое тело в нижней половине трубы. Наиболее интенсивное звучание наблюдается в том случае, когда источник теплоты расположен на расстоянии четверти длины трубы от нижнего конца. Эффект наблюдается, если средняя скорость движения воздуха в трубе изменяется в некотором интервале, а мощность теплового источника выше некоторого предельного значения.

Термоакустические колебания наблюдаются и при отсутствии потока воздуха. Для этого в горизонтально расположенную трубу, один конец которой закрыт, а другой открыт, или закрытую на обоих концах, необходимо поместить нагреватель и близко расположенный к нему охладитель (рис. 1.1, г). При некоторой разнице температур происходит самовозбуждение звука. Этот эффект был обнаружен Зондхауссом. Установлено, что аналогичное явление наблюдается при распространении фронта пламени по трубе, при горении за стабилизаторами в открытом пространстве и в упругих оболочках. На практике с проблемой самовозбуждения акустических колебаний столкнулись при форсировании камер сгорания энергетических установок: топок котельных агрегатов, газотурбинных установок, воздухонагревателей доменных печей,

газовых печей, парогенераторов. Появление колебаний с большой амплитудой часто приводит к повреждениям элементов конструкции установок, ухудшает показатели работы агрегатов в целом.

Особенно остро проблема вибрационного горения стоит при создании ракетных и реактивных двигателей, так как форсировка процесса горения здесь достигает высоких пределов. Мощные акустические колебания, возникающие в воздушно–реактивных двигателях, ракетных двигателях на жидком и твердом топливе, вызывают серьезные разрушения узлов установки, вплоть до вывода ее из строя. В жидкостных ракетных двигателях (рис. 1.2) колебания приводят к возникновению вибрационных нагрузок, достигающих  $10^3$  g. Нарушает работа чувствительных элементов бортовых систем управления ракет, полностью или частично разрушаются элементы конструкции двигателя и полезной нагрузки, появляется неустойчивость тяги, расхода топлива и удельного импульса, величины и направления вектора тяги. Под воздействием колебаний интенсифицируется процесс теплопередачи. При тангенциальных колебаниях рост коэффициента теплоотдачи происходит по всей длине камер сгорания. В этом случае самым опасным местом является область критического сечения, где максимальны тепловые потоки, и появляется опасность прогара сопла в дозвуковой части.

Принято классифицировать неустойчивость горения по частоте возникающих колебаний. Низкочастотная неустойчивость характеризуется тем, что длина волны колебаний намного больше размеров, свойственных камере сгорания и системе подачи, так что двигатель можно рассматривать как совокупность инерционных и упругих элементов. Волновые свойства камеры не играют роли, и ее можно считать акустической емкостью. Процесс горения является запаздывающим звеном, причем время запаздывания представляет собой интервал времени, необходимый для поступления топлива в камеру сгорания, его движения до области распыления, испарения и сгорания. Иногда этот тип неустойчивости является следствием взаимодействия процессов горения и впрыска через форсуночную головку. Возникают колебания расхода



топлива, изменяется качество его распыления, что способствует возбуждению колебаний. Для устранения низкочастотной неустойчивости рекомендуется увеличение следующих характеристик: перепада давления на форсунках, объема камеры сгорания, отношения длин трубопроводов подачи к их диаметрам. Наиболее опасной является высокочастотная (акустическая) неустойчивость горения. Частота колебаний соответствует одной из собственных частот камеры сгорания как акустического резонатора. Наблюдаются продольные и поперечные (радиальные, тангенциальные) колебания с высокими частотами.

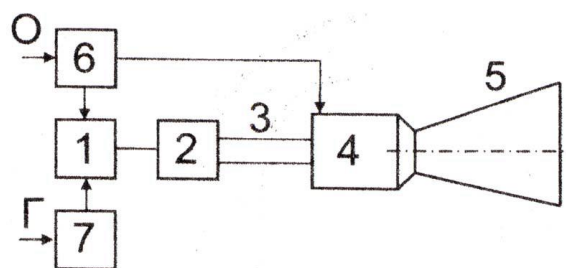


Рис. 1.2. Схема ЖРД с дожиганием генераторного газа:

1 – газогенератор; 2 – турбина; 3 – газовый тракт; 4 – основная камера сгорания; 5 – сопло; 6, 7 – насосы окислителя и горючего не учитывают.

На появление этого типа неустойчивости влияют следующие основные факторы: запаздывание воспламенения, изменение времени подготовительных процессов, скорость химических реакций под воздействием колебаний давления и температуры. Для устранения высокочастотных колебаний рекомендуется оснащать форсуночную головку противопульсационными перегородками, впрыскивать более летучий компонент с большей скоростью, усиливать поглощение акустической энергии на стенках камеры сгорания путем соответствующей облицовки или установки поглотителей, действующих по принципу резонатора Гельмгольца, а также путем введения твердых частиц в продукты сгорания.

В больших камерах сгорания частоты собственных колебаний не так велики, поэтому волновые свойства системы подачи могут играть существенную роль. В этом случае говорят о неустойчивости на промежуточных частотах.

Обнаружено, что автоколебания в ПВРД могут быть следствием неустойчивого формирования дозвукового и сверхзвукового потоков. Происходит периодическое появление и исчезновение скачков уплотнения перед входным устройством или их перемещение внутри диффузора. ПВРД могут быть оборудованы дозвуковым диффузором, поперечное сечение которого меньше поперечного сечения камеры сгорания. Это конструктивное усложнение системы расширяет возможности возникновения автоколебаний.

В турбореактивном двигателе (рис. 1.3) резонирующий объем заключен между компрессором и турбиной. После турбины помещается форсажная камера с дозвуковым диффузором. В камерах сгорания наблюдаются продольные и поперечные колебания. В форсажной камере могут возбуждаться продольные колебания, что связано с некачественным смесеобразованием. Форсажным камерам отвечают высокие частоты колебаний от одной до трех тысяч герц.

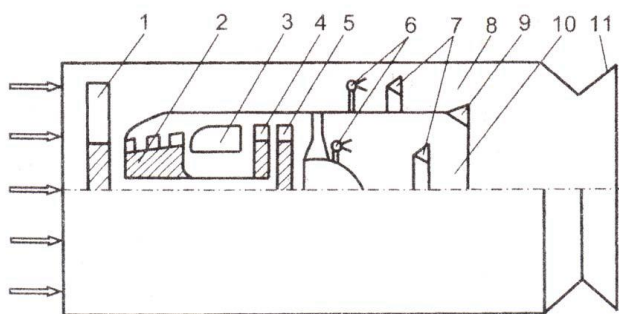


Рис. 1.3. Схема ДТРД с раздельным форсированием в контурах:

1, 2 – компрессоры низкого и высокого давления; 3 – основная камера сгорания; 4, 5 – турбины привода компрессоров; 6 – форсунки; 7 – стабилизаторы пламени; 8, 10 – наружный и внутренний контуры; 9 – смеситель газовых потоков; 11 – сопло резонансное и в целом давали изменение давления в виде модулированной синусоиды.

При эксплуатации форсажных камер ТРД на различных высотах и полетных скоростях было замечено, что при дозвуковых скоростях наблюдаются продольные (низкочастотные) колебания, а поперечные колебания возникают, если скорость полета – сверхзвуковая. Систематические исследования автоколебаний газа в форсунках и их влияния на устойчивость рабочего процесса в напряженных камерах сгорания провели В.С. Базаров, А.В. Андреев, Е.Ю. Марчуков. Показано, что неустойчивость горения развивается по схеме двух связанных автоколебательных систем в результате взаимодействия динамических процессов в системе подачи и форсунках с процессами, протекающими в камере сгорания.

Следует признать, что вибрационное горение в ВРД менее изучено, чем в ЖРД, имеющиеся результаты носят разрозненный характер, а опыт по устранению колебаний не обобщен.

При исследовании акустической неустойчивости горения в камерах сгорания двигателей летательных аппаратов широко используются лабораторные и стендовые модели, которые позволяют с наименьшими материальными затратами изучить интересующие аспекты появления вибрационного горения в натурных установках.

Ряд исследований был проведен на модели (рис. 1.4), состоящей из двух труб, в одной из которых происходит горение, а другая является системой подачи газообразных компонентов. При определенных размерах устройства, изменяя состав смеси, можно было наблюдать колебания, соответствующие первым пяти частотам камеры сгорания. Лабораторными моделями для изучения вибрационного горения в камерах сгорания ВРД является труба или канал прямоугольного сечения, по которым движется поток однородной газообразной смеси, а фронт пламени удерживается стабилизатором в виде стержня, диска, конуса, клина и т.д. (рис. 1.5). При определенных условиях, зависящих от состава горючей смеси, скорости обтекания стабилизатора, его

формы и размеров, происходит самовозбуждение звуковых колебаний с частотой, близкой к одной из собственных частот колебаний газа в канале.

Из изложенного и имеющихся экспериментальных данных следует:

1. Акустические колебания газа возникают самопроизвольно, следовательно, вибрационное горение – автоколебательное явление.
2. Самовозбуждение звука наблюдается в установках с горением или при наличии теплопередачи от стенок и находящихся в газе нагретых тел.
3. Обычно процесс начинается с бесконечно малых возмущений, амплитуда которых постепенно нарастает, пока колебания не примут установившийся характер. В этом случае говорят о «мягком» режиме вибрационного горения. В камерах сгорания ЖРД, как правило, неустойчивость горения появляется после начального конечного импульса давления, возникающего при запуске двигателя. Это «жесткий» режим автоколебаний.
4. Вибрационное горение в камерах сгорания напряженных энергетических установок – нежелательное явление, требующее разработки специальных мер по его устранению.

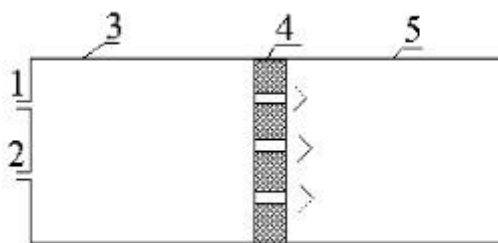


Рис. 1.4. Модель ракетной камеры сгорания:

1 – горючий газ; 2 – воздух; 3 – смесительная труба; 4 – многоканальная горелка; 5 – камера сгорания

## 2.1. Применение вибрационного горения на практике

Колебания, возникающие в сплошных средах, могут интенсифицировать ряд процессов, происходящих в промышленных установках. Известно, что в колеблющихся потоках происходит существенное ускорение различных тепломассообменных процессов (смесеобразования, испарения, теплопередачи

от газа к стенкам, теплообмена при взаимодействии потока с нагретыми телами и пр.), улучшается агломерация частиц и коагуляция аэрозолей. При вибрационном горении, кроме того, происходит увеличение теплонапряженности топочного объема, улучшение полноты сгорания топлива по сравнению с равномерным режимом горения. В установках, снабженных механическими или аэродинамическими клапанами, колебания приводят к дополнительному поступлению воздуха в камеру сгорания. В некоторых случаях можно вообще отказаться от тягодутьевых механизмов. Эти преимущества могут быть использованы в энергетических установках с умеренной форсировкой процессов горения, в которых амплитуда колебаний будет не такой большой, чтобы привести к каким-то серьезным последствиям.

Первое устройство вибрационного горения было сконструировано Караводиным, получившим в 1906 году патент на газовую турбину с камерой сгорания, в которую горючая смесь подавалась через механические клапаны (рис. 1.6). Установка работала по принципу резонатора Гельмгольца. Камера сгорания – это акустическая емкость, в которой происходит периодическое сжатие и разрежение газа. Колебательное движение совершают продукты сгорания в резонансной трубе – «горле» резонатора. Широкое применение получили устройства, состоящие из двух труб, одна из которых, более широкая и короткая, является камерой сгорания, другая – резонансной трубой. Одна из таких установок изображена на рис. 1.7.

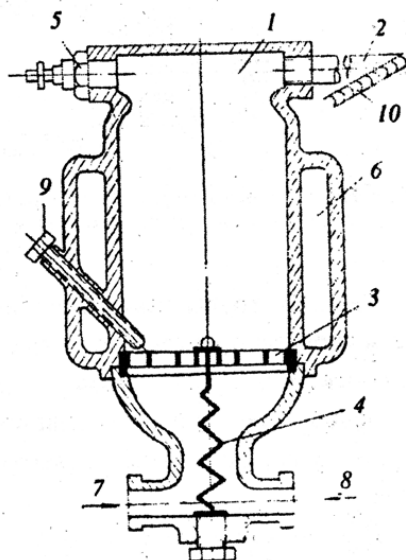


Рис. 1.6. Камера вибрационного горения системы Караводина:

1 – камера сгорания; 2 – резонансная труба; 3 – клапан; 4 – пружина; 5 – запальная свеча; 6 – охлаждающая рубашка; 7 – подвод воздуха; 8 – подвод топлива; 9 – регулировочный винт; 10 – лопатка турбины

Аналогичными устройствами являются труба Шмидта, камеры вибрационного горения, разработанные Ю.Л. Бабкиным, Ф. Рейнстом и др., которые отличаются способом подачи топлива и воздуха, некоторыми особенностями смесеобразования, воспламенения и стабилизации пламени. Размеры трубы изменялись в достаточно широком диапазоне. Пусть горение происходит в камере, длина которой намного меньше соответствующего размера трубы–резонатора, а соотношение поперечных сечений – противоположное. Тогда, с точки зрения теории звука, получается колебательная система типа емкость–труба.

В короткой камере сгорания, поперечный размер которой соизмерим с диаметром резонансной трубы, продольные колебания газа будут почти такие же, как в трубе, закрытой на входе и открытой на выходе. В общем случае, когда продольные и поперечные размеры камеры сгорания и трубы–резонатора соизмеримы, необходимо учитывать волновые свойства обеих частей. В качестве примера приводится устройство (рис. 1.8), состоящее из двух

последовательно соединенных труб с аэродинамическими клапанами на входе. В результате колебаний в камере сгорания создается избыточное давление, а на выходе – поток горячего газа. Акустические возмущения в таких установках распространяются так же, как в двух последовательно соединенных трубах.

Для сжигания твердого топлива В.С. Северянин, В.Н. Подымов, Т.И. Назаренко, Ф.Н. Имамутдинов разработали ряд устройств вибрационного горения, аналогичных трубе Рийке. Вместо сетки в вертикально расположенной трубе находится специальная решетка, удерживающая слой топлива. Установка аналогична трубе, открытой на обоих концах. Колебания с наименьшей из частот возникают, когда решетка расположена на расстоянии четверти длины трубы от ее нижнего конца.

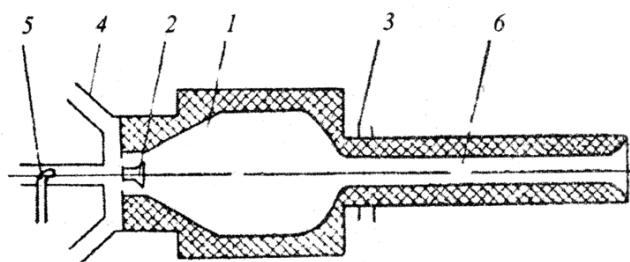


Рис. 1.7. Камера вибрационного горения:

- 1 – головная часть камеры; 2 – стабилизатор; 3 – ввод вторичного воздуха;  
4 – ввод первичного воздуха; 5 – форсунка; 6 – резонансная труба

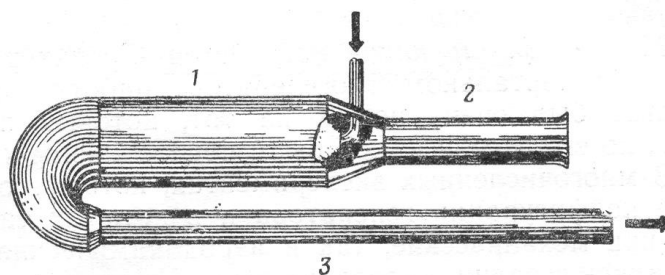


Рис. 1.8. Пульсирующий реактивный двигатель с задним положением  
воздушного входа:

- 1 – камера сгорания; 2 – аэродинамический клапан; 3 – выхлопное сопло

Ряд исследований по сжиганию твердого, жидкого и газообразного

топлив был проведен Ж.А. Карвалью (J.A. Carvalho). При горении твердых частиц использовалась установка, подобная трубе Рийке.

Вибрационное горение жидких и газообразных веществ исследовалось в устройстве, представленном на рис. 1.9. Объем входной емкости был достаточно велик, так что и в этом случае камера сгорания – это труба с открытыми концами.

Итак, с акустической точки зрения логично выделить следующие типы устройств вибрационного горения: труба, резонатор Гельмгольца, емкость–труба, две последовательно соединенные трубы. Возможны более сложные случаи, например, сдвоенные камеры сгорания за счет параллельного соединения.

В настоящее время задачи интенсификации процессов горения и тепломассообмена с помощью колебаний не потеряли своей актуальности. Во-первых, это связано с неутешительными прогнозами по запасам природного топлива. По данным XIV Мирового энергетического конгресса (МИРЭК) обеспеченность разведанными извлекаемыми запасами органического топлива составляет: по нефти (включая конденсат) – примерно 40 лет, по природному газу – около 60 лет, по твердым топливам – около 220 лет. Это значит, что в энергетике первоочередными являются следующие задачи:

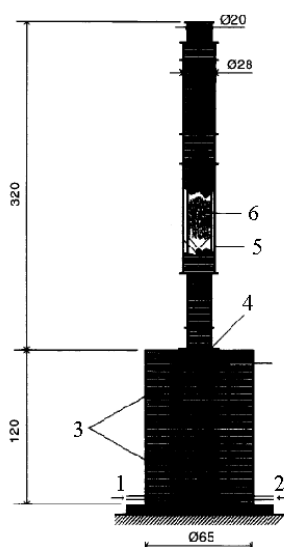


Рис. 1.9. Устройство вибрационного горения типа трубы Рийке:



1 – топливо; 2 – воздух; 3 – накопительная воздушная камера; 4 – труба–резонатор; 5 – водяная рубашка; 6 – пламя

1. Находить более эффективные способы сжигания основных видов топлива.
2. Разрабатывать и совершенствовать энергосберегающие технологии.
3. Находить и использовать нетрадиционные виды топлив.

Другой современный аспект применения вибрационного горения связан с проблемой защиты окружающей среды. Развитие промышленности привело к появлению различных отходов, требующих утилизации. В полной мере это относится и к бытовому мусору. Часто термическое разложение отходов является единственным способом их уничтожения. Использование вибрационного режима горения является одним из перспективных направлений, поскольку одновременно решаются обе указанные задачи – получение энергии за счет сжигания отходов и их утилизация путем частичного или полного уничтожения. Интенсификация процесса горения колебаниями дает возможность сжигать вещества, которые в обычных печах, с равномерным режимом, не горят или имеют низкую полноту сгорания. На это обратили внимание еще в 70-ые годы прошлого века. Лабораторные исследования по сжиганию твердых отходов в слое на установках типа трубы Рийке показали перспективность подобного способа утилизации. Активно в этом направлении работают за рубежом, о чем свидетельствует появление на международных симпозиумах по пульсирующему горению секций по применению установок вибрационного горения для защиты окружающей среды.

Проведенные исследования показывают, что есть отходы, которые вообще нельзя сжигать, а также то, что при вибрационном горении, более интенсивном, могут выделяться токсичные вещества, которые при равномерном горении не образуются. Поэтому разработку печей для любых видов отходов необходимо проводить параллельно с анализом химического состава продуктов сгорания.

Необходимо отметить, что достаточно широкое применение получили устройства типа трубы Рийке. Возможности других перечисленных акустических систем в плане сжигания отходов изучены недостаточно. Несмотря на большой опыт по разработке и внедрению устройств вибрационного горения полезного назначения, следует признать, что они не получили должного широкого применения на практике. Основные причины такого положения дел следующие:

1. Отрицательные последствия, вызываемые колебаниями газа: шум, сопровождающий работу камер вибрационного горения, превышающий допустимые санитарные нормы; механические повреждения (прогорание клапанов, удерживающих решеток, вибрация корпуса установки, развинчивание гаек, ослабление крепежных узлов и пр.). К сожалению, эти факторы до сих пор тщательно не проанализированы.
2. Недостаточная изученность физических процессов, приводящих к самовозбуждению звука в установках с горением. Отсутствие четких рекомендаций по обеспечению вибрационного горения с учетом агрегатного состояния топлива, способа его подачи, характера смесеобразования, акустического типа устройства, его размеров, соответствующих оптимальному режиму, при котором амплитуда колебаний газа достаточно велика для того, чтобы стали заметны преимущества вибрационного горения, но в то же время недостаточна для проявления перечисленных негативных факторов.

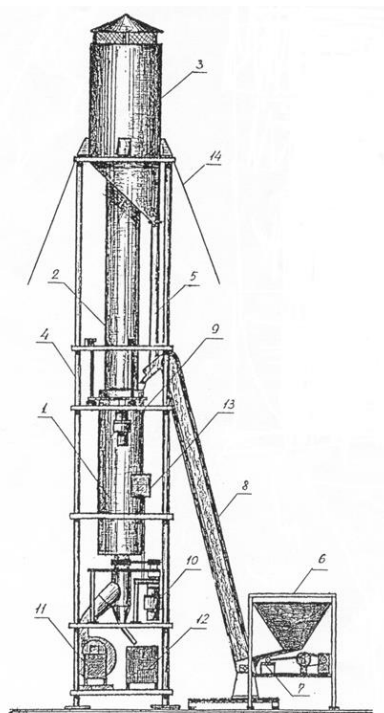


Рис. 1.10. Печь для сжигания бытовых и промышленных отходов  
в режиме пульсирующего горения:

1 – шахта с вращающейся колосниковой решеткой; 2 – резонатор;  
3 – пылеуловитель; 4 – стойки; 5 – труба для сброса пепла; 6 – бункер для  
отходов; 7 – вибротранспортер; 8 – подъемник; 9 – привод управления;  
10 – привод колосниковой решетки; 11 – вентилятор; 12 – бункер для  
минеральных остатков; 13 – окно; 14 – растяжки

3. Слабая теоретическая база для проведения расчетов на стадии проектно–конструкторских работ. Имеющиеся устройства, как правило, результат научно–технической интуиции их создателей и последующей кропотливой опытно–конструкторской доработки в надежде на счастливый случай.

### Вопросы:

1. Что такое вибрационное горение.
2. Какие установки вибрационного горения Вы можете назвать.
3. Приведите пример вибрационного горения.
4. Классификация вибрационного горения.

## 5. Отрицательные и положительные стороны вибрационного горения.

## **Тема 2. Продольные колебания газа в системах с продольным градиентом температуры**

### **Лекция 2**

**Аннотация:** В данной главе рассматриваются колебания газа с учетом продольного градиента температуры. В результате чего получено уравнение для расчета частот колебаний газа в устройствах типа емкость–труба, в том числе аналогичных резонатору Гельмгольца, с учетом линейного распределения скорости звука и проведен анализ зависимости полученных результатов от скачка температуры в трубе. Для примера была рассмотрена установка типа емкость–труба, резонатор Гельмгольца. Дан анализ потерь акустической энергии вследствие излучения звука на открытом конце трубы и поглощения в пристеночной области.

**Ключевые слова:** частоты колебаний, потери, градиент температуры, резонатор Гельмгольца.

#### **Методические рекомендации по изучению темы**

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления о предмете;
- В качестве самостоятельной работы нужно подготовиться к устному опросу;
- Для проверки усвоения темы имеются вопросы к каждой лекции.

#### **Литература**

Автоколебания газа в установке с горением. В.М. Ларионов, Р.Г. Зарипов / Изд-во казан. гос. техн. ун-та, 2003. С. 42-49, 52-61.

#### **Глоссарий**

**Адиабатический**, или **адиабатный процесс** (от др.-греч. ἀδιάβατος — «непроходимый») — термодинамический процесс в макроскопической системе, при котором система не обменивается теплотой с окружающим пространством.

**Волновое уравнение** в математике — линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее малые поперечные колебания тонкой мембраны или струны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах (акустика, преимущественно

линейная: звук в газах, жидкостях и твёрдых телах) и электромагнетизме (электродинамике). Находит применение и в других областях теоретической физики, например при описании гравитационных волн. Является одним из основных уравнений математической физики.

**Вязкость (внутреннее трение)** — одно из явлений переноса, свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. В результате работа, затрачиваемая на это перемещение, рассеивается в виде тепла.

**Идеальный газ** — математическая модель газа, в которой в рамках молекулярно-кинетической теории предполагается, что: 1) потенциальной энергией взаимодействия частиц, составляющих газ, можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией; 2) суммарный объём частиц газа пренебрежимо мал; 3) между частицами не действуют силы притяжения или отталкивания, соударения частиц между собой и со стенками сосуда абсолютно упруги; 4) время взаимодействия между частицами пренебрежимо мало по сравнению со средним временем между столкновениями.

**Резонатор Гельмгольца** (акустический резонатор) — акустический прибор, сосуд сферической формы с открытой горловиной. Изобретен Гельмгольцем около 1850 г. для анализа акустических сигналов, теория разработана Г. Гельмгольцем и Дж. Рэлеем (см. Резонанс Гельмгольца).

**Теплопроводность** — это процесс переноса внутренней энергии от более нагретых частей тела (или тел) к менее нагретым частям (или телам), осуществляемый хаотически движущимися частицами тела (атомами, молекулами, электронами и т. п.). Такой теплообмен может происходить в любых телах с неоднородным распределением температур, но механизм переноса теплоты будет зависеть от агрегатного состояния вещества.

**Топочный объем** (англ. *furnace volume*) — пространство, ограниченное полом камеры сжигания, огнеупорными стенами, теплопоглощающими стенками камеры сгорания с циркулирующей водой, а также поверхностью свода, полами пластинами или водогрейными трубами котла. При наличии

поперечной (шиберной) стенки, установленной в топке, топливный объем уменьшается на ту часть, которая находится за этой стенкой.

### Вопросы для изучения:

1. Колебания газа в трубах с учетом продольного градиента температуры.
2. Установка типа емкость–труба, резонатор Гельмгольца.
3. Потери акустической энергии.

## 2.1. Колебания газа в трубах с учетом продольного градиента температуры

Распространение малых акустических возмущений в идеальном изоэнтропическом газе описывается волновым уравнением, в котором скорость звука постоянна, а решения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u'(x,t) &= C \cos(k_0 x + \varphi) \exp i \omega t, \quad k_0 = \omega / c_0, \\ p'(x,t) &= -i \rho_0 c_0 C \sin(k_0 x + \varphi) \exp i \omega t. \end{aligned} \quad (1)$$

В теории звука широко используется понятие акустического импеданса, равного отношению акустического давления к акустической скорости в данном сечении трубы или точке звукового поля. Импеданс является комплексной величиной, ее действительная часть обусловлена потерями акустической энергии, мнимая часть влияет на фазу звуковой волны. Без учета потерь граничные условия на концах трубы обычно записывают в виде

$$p'(0,t) = -i Y_0 u'(0,t), \quad p'(l,t) = i Y_l u'(l,t).$$

Из первого условия с учетом решений (1) следует

$$\varphi = \arctg \bar{Y}_0, \quad \bar{Y}_0 = Y_0 / (\rho_0 c_0).$$

Второе условие приводит к выражению

$$\operatorname{tg}(k_0 l) = \frac{\bar{Y}_0 + \bar{Y}_l}{\bar{Y}_0 \bar{Y}_l - 1}, \quad \bar{Y}_l = Y_l / (\rho_0 c_0)$$

Это известное в акустике уравнение частот колебаний газа в трубе с произвольными граничными условиями. Например, для трубы, открытой на

концах, можно положить  $\bar{Y}_0 = \bar{Y}_l = 0$ , если вместо реальной длины трубы взять «эффективную»:

$$l^* = l + 2\Delta l, \Delta l = 0.613R. \quad (2)$$

Решение для частот колебаний имеет вид

$$f_n = c_0 n / (2l^*), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть внутри трубы имеется плоскость теплоподвода, которая делит поток на холодную и горячую части. Газ входит в трубу, имея температуру  $T_{1,0}$ . В некотором сечении на расстоянии  $x^*$  от входа температура скачком из  $T_{2,0}$  меняется до  $T_{2,0}(x)$ . Потом за счет теплоотдачи к стенкам температура газа и скорость звука, которая прямо пропорциональна корню квадратному из температуры, уменьшаются (рис. 1). Если скорость потока велика, а труба – короткая, падение температуры можно не учитывать. Исследования распространения звуковых волн в трубе при скачкообразном изменении температуры газа показали, что при перемещении скачка от входа к концу трубы частоты колебаний изменяются неравномерно. Например, в трубе, открытой на концах, в интервалах значений  $x^*$  от 0 до 0.25l и от 0.5l до l первая из частот колебаний быстро уменьшается, а в диапазоне от 0.25l до 0.5l практически остается постоянной. Уравнение частот колебаний имеет вид

$$\sqrt{B} \operatorname{tg}(\omega x^* / c_1) + \operatorname{tg}[\omega(l - x^*) / c_2] = 0. \quad (3)$$

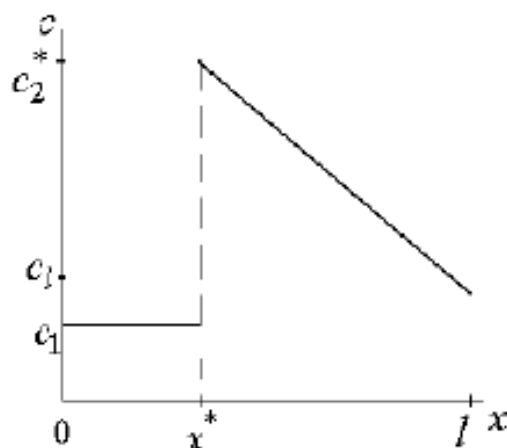
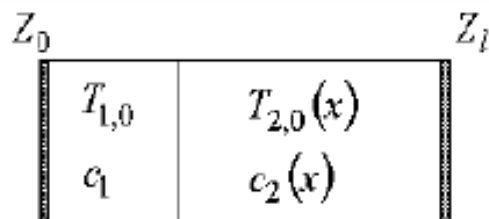




Рис. 1. Принципиальная схема трубы и распределение скорости звука в газе

В длинной трубе при небольшой скорости потока, а также при наличии воздушного или водяного охлаждения стенок падение температуры будет значительным, появится градиент скорости звука в горячей части потока. Для идеального газа при отсутствии возмущений тепловых потоков, градиента среднего давления, при малых числах Маха волновое уравнение для скорости потока имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_2'}{\partial t^2} - c_2^2(x) \frac{\partial^2 u_2'}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

В общем случае это уравнение решается приближенными методами или путем численного интегрирования. Положим, что скорость звука изменяется по линейному закону

$$\text{Решение ищется в } c_2(x) = a - bx \quad \text{при} \quad x^* \leq x \leq l. \quad (5)$$

$$u_2' = F_u(x) \exp(i\omega t) \quad (6)$$

$$\frac{d^2 F_u}{dx^2} + \left( \frac{\omega}{c_2} \right)^2 F_u = 0$$

Введем новую переменную

$$y_u = \int \frac{\omega dx}{c_2}.$$

После преобразования уравнение (6) принимает вид

$$\frac{d^2 F_u}{dy_u^2} + \frac{b}{\omega} \cdot \frac{dF_u}{dy_u} + F_u = 0.$$

Решение ищется в виде  $F_u = F^* \exp(\alpha' y)$ .

Определяя значения  $\alpha'$ , получим

$$F_u(y_u) = e^{-\frac{by_u}{2\omega}} \left( F_1^* e^{i\beta y_u} + F_2^* e^{-i\beta y_u} \right),$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left( \frac{b}{2\omega} \right)^2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, полагая  $2F_1^* = C_2 \exp i\varphi_2$ ,

$$u_2'(x, t) = \exp \left( -\frac{b}{2} \int \frac{dx}{c_2} \right) C_2 \cos \left[ \left( \omega \beta \int \frac{dx}{c_2} \right) + \varphi_2 \right] \exp(i\omega t). \quad (7)$$

Если градиент скорости звука отсутствует, для акустической скорости должно быть выражение типа (1)

$$u_2'(x, t) = C_2 \cos(\omega x/a + \varphi_2) \exp(i\omega t). \quad 5$$

(8)

При  $b=0$ ,  $\beta=1$ , чтобы из соотношения (7) получить (8), необходимо положить  $\text{const} = (1/b) \cdot \ln a$ . Полагая  $c_2(x) = a = c_2^*$ , переходя к пределу при  $b \rightarrow 0$ , раскрывая неопределенность типа  $0/0$ , получим

$$\left( \int \frac{dx}{c_2} \right) \Big|_{b \rightarrow 0} = \left[ -\frac{1}{b} \ln \left( 1 - \frac{bx}{a} \right) \right] \Big|_{b \rightarrow 0} = \frac{x}{c_2^*}, \quad (9)$$

т.е. постоянная.

Окончательное выражение для возмущений скорости потока принимает вид

$$u'_2(x, t) = C_2 e^{i\omega t} \left( 1 - \frac{bx}{a} \right)^{1/2} \cos \left[ \varphi_2 - \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bx}{a} \right) \right]. \quad (10)$$

Уравнение

$$p'_2(x, t) = -\rho_{2,0} c_2^2 \int \frac{\partial u'_2}{\partial x} dt = -\frac{\rho_{2,0} c_2^2}{i\omega} \cdot \frac{dF_u}{dx} e^{i\omega t}.$$

Выражение для возмущений давления имеет вид:

$$p'_2(x, t) = -i\rho_{2,0} c_2 C_2 e^{i\omega t} \left( 1 - \frac{bx}{a} \right)^{1/2} \left\{ \frac{b}{2\omega} \cos \left[ \varphi_2 - \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bx}{a} \right) \right] + \beta \sin \left[ \varphi_2 - \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bx}{a} \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

На входе в трубу справедливо соотношение

где  $\dot{Y}_0(0, t) = -iY_0 u'_1(0, t)$ , импеданса в сечении  $x=0$ ; выражения для акустических возмущений в холодном газе описываются выражениями (1) с учетом соответствующего индекса. Из этого граничного условия следует

$$\varphi_1 = \arctg[Y_0/(\rho_{1,0} c_1)] \text{ является граничное условие}$$

и с учетом формул (10), (11) имеем

$$\varphi_2 = \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bl}{a} \right) - \arctg \left[ \frac{1}{\beta} \left( \frac{b}{2\omega} + \frac{Y_l}{\rho_{l,0} c_l} \right) \right].$$

Возмущения до и после скачка температуры, имеют вид

$$p'_1(x^*, t) = p'_2(x^*, t), \quad u'_1(x^*, t) = u'_2(x^*, t). \quad (13)$$

$$-\frac{b}{2\omega} + \beta \lg \left[ \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bx^*}{a} \right) - \varphi_2 \right] + \frac{c_2^*}{c_1} \lg \left( \frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1 \right) = 0.$$

Уравнения для возмущений температуры и скорости газа в трубе с любыми граничными условиями.

Для трубы, открытой на концах, заменяя реальную длину трубы эффективной, полагая  $Y_0 = 0 = Y_l$ , получим

$$\varphi_1 = 0;$$

$$\varphi_2 = \frac{\omega\beta}{b} \ln \left( 1 - \frac{bl^*}{a} \right) - \arctg \left( \frac{b}{2\omega\beta} \right).$$

(14)

Если в равенствах (13), (14) положить  $b = 0$ ,  $\beta = 1$ , раскрыть неопределенности, получим  $\varphi_2 = -\omega l^* / c_2^*$ , а уравнение частот совпадет с выражением (2.3), в котором с учетом концевых поправок необходимо заменить реальную длину трубы на эффективную.

Были проведены измерения собственных частот акустических колебаний газа в трубе, открытой на концах, длиной 0.91 м с внутренним диаметром 0.036 м. Колебания возбуждались с помощью генератора звуковых сигналов и электродинамического громкоговорителя, а регистрировались акустическим зондом и соответствующей аппаратурой. Собственные частоты определялись резонансным методом. На оси трубы располагалось пропано–воздушное пламя, образующееся на конце газоподающей трубки длиной 3 м с внутренним диаметром 0.005 м.

На рис. 2 приведены экспериментальные и теоретические данные для двух первых собственных частот при усло.  $c_2^* = 497 \text{ м/с}$   $b = 165c^{-1}$ . Эти значения были определены по результатам измерений распределения вдоль трубы средней по сечению температуры газа.

Опытные данные и результаты расчета количественно согласуются. При изменении положения скачка от входа к выходу из трубы частота колебаний изменяется не монотонно: участки, где происходит уменьшение частоты, чередуются с интервалами, в которых она изменяется противоположным образом. На кривых появляются минимумы и максимумы, которые отсутствуют, если имеется скачок температуры, но градиент скорости звука в горячем газе отсутствует.

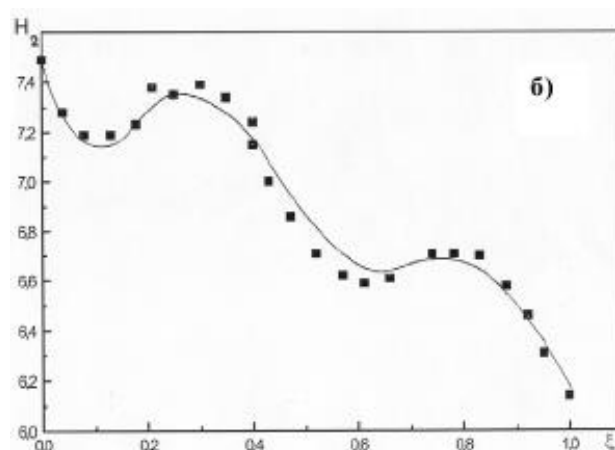
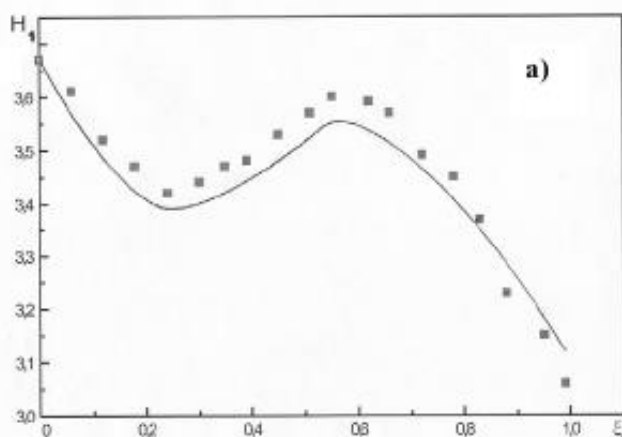


Рис. 2. Зависимости частоты колебаний от положения скачка температуры в трубе:

а – первая; б – вторая собственная частота

$$H = \omega l / c_1 \quad \xi = x^* / l \quad ; \text{ линия – теория, точки – эксперимент}$$

## 2.2. Установка типа емкость–труба, резонатор Гельмгольца

На практике широкое распространение получило устройство, которое можно представить принципиальной схемой, включающей камеру сгорания (топочный объем), трубу для отвода продуктов сгорания, входное устройство для подвода горючих компонентов отдельно или в виде смеси. При горении кускового твердого топлива в этом месте происходит поступление воздуха. Газ входит в топочный объем через отверстия общей площадью  $S_0$ . Импеданс входного устройства  $Z_{0,0}$  зависит от акустических свойств системы подачи (рис. 3).

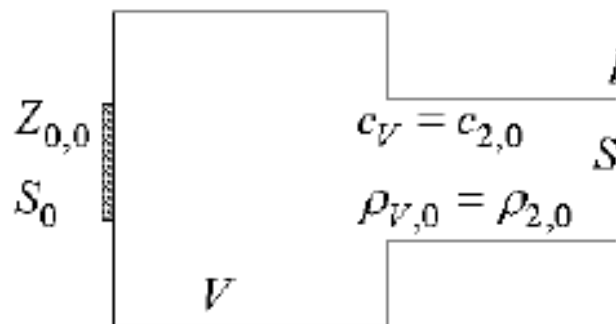


Рис. 3. Акустическая модель «емкость – труба»

Топочный объем обладает свойствами акустической емкости, если его поперечный размер намного больше диаметра трубы, а продольный намного меньше длины волны. В этом случае движением газа в емкости можно пренебречь и считать, что изменения давления во всех точках емкости происходят одинаково

$$p'_0 = p'_V = p'_{2,0}, \quad (15)$$

где  $p'_0$  – акустическое давление на входе в емкость,  $p'_V$  – в емкости,  $p'_2$  – на выходе в трубу.

Линеаризованное уравнение сохранения массы для газа в емкости имеет вид

$$-\frac{V}{\rho_0 c_0^2} \cdot \frac{\partial p'_V}{\partial t} + S_0 u'_0 = S u'_{2,0}.$$

Для гармонических колебаний  $\partial p'_V / \partial t = i\omega p'_V$ . После деления на  $p'_V$  с учетом (18) получим

$$\frac{S u'_{2,0}}{p'_{2,0}} = \frac{S_0 u'_0}{p'_0} - \frac{i\omega V}{\rho_0 c_0^2}. \quad (16)$$

Температура газа такая же, как в емкости, затем из-за охлаждающего действия стенок она понижается. Используем выражения для акустических возмущений (10), (11), полученные для линейного распределения скорости звука. На входе в трубу, полагая  $x = 0$ , получим

$$u'_{2,0} = C_2 e^{i\omega t} \cos \varphi_2,$$

$$p'_{2,0} = -i\rho_{V,0} c_{2,0} C_2 e^{i\omega t} \left( \frac{b}{2\omega} \cos \varphi_2 + \beta \sin \varphi_2 \right).$$

На входе в емкость  $p'_0 = -iY_{0,0} u'_0$ , где  $Y_{0,0}$  – мнимая часть импеданса входного устройства. С учетом сделанных замечаний выражение (19) после некоторых преобразований принимает вид

$$\frac{b}{2\omega} + \beta \tan \varphi_2 + F^{-1} = 0. \quad (17)$$

$$F = \left( \frac{\omega V}{c_0 S} - \frac{\varepsilon_0}{Y_{0,0}} \right) \frac{c_0}{c_{2,0}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{S_0}{S}, \quad Y_{0,0} = \frac{Y_{0,0}}{\rho_0 c_0}. \quad (18)$$

Уравнение (17) позволяет рассчитать частоты колебаний газа при любых условиях на входе и выходе устройства рассматриваемого типа.

Если длина трубы мала по сравнению с длиной волны, получается устройство, которое называют резонатором Гельмгольца. В этом случае, заменяя тангенс аргументом, получим формулу

$$\omega = c_{2,0} \left( \frac{S}{l^* V} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда топливо вводится в емкость с помощью форсунок или путем загрузки, а воздух поступает из атмосферы через патрубок. Акустические возмущения в патрубке описываются выражениями типа (1)

$$\begin{aligned} u'_0(y_0, t) &= C_0 \cos(\omega y_0 / c_0 + \varphi_0) \exp(i\omega t), \\ p'_0(y_0, t) &= -i\rho_0 c_0 C_0 \sin(\omega y_0 / c_0 + \varphi_0) \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

граничные условия имеют вид

$$u'_0(0, t) = -u'_0, \quad p'_0(0, t) = p'_0, \quad p'_0(l_0^*, t) = 0.$$

Тогда  $\varphi_0 = -\omega l_0^* / c_0$ . Так как по определению  $Z_{0,0} = -p'_0 / u'_0$ , то

$$Y_{0,0} = \text{Im}(Z_{0,0}) = \rho_0 c_0 \text{tg}(\omega l_0^* / c_0), \quad (20)$$

пусть горючая смесь поступает в топочный объем из небольшой смесительной камеры через ряд одинаковых отверстий, глубина которых намного меньше длины волны, так что газ в них колеблется как твердое тело. Используем линеаризованное уравнение движения газа в отверстии

$$\rho_0 \frac{\partial u'_s}{\partial t} + \frac{\partial p'_s}{\partial y} = 0.$$

Для гармонических колебаний интегрирование этого уравнения по длине отверстия дает

$$i\omega \rho_0 l_s u'_s + p'_0 - p'_{V,0} = 0. \quad (21)$$

линеаризованное уравнение сохранения массы имеет вид

$$\rho_0 u'_0 S_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho'_{V,0} dV, \quad u'_s = u'_0.$$

Изменения в смесительной камере связаны известным в линейной акустике соотношением:  $p'_{V,0} = c_0^2 \rho'_{V,0}$ . Тогда

$$p'_{V,0} = i \frac{\rho_0 c_0^2 S_0}{\omega V_0} u'_0.$$

Поделив уравнение (24) на  $u'_0$ , получим

$$Y_{0,0} = -\text{Im} \left( \frac{p'_0}{u'_0} \right) = \rho_0 c_0 \left( \frac{\omega l_s}{c_0} - \frac{c_0 S_0}{\omega V_0} \right). \quad (22)$$

горения через отверстия из атмосферы, то,  $V_0 \rightarrow \infty$

а выражение (25) дает  $Y_{0,0} = \rho_0 \omega l_0^*$  что является частным случаем короткого патрубка длиной  $l_0^* = l_0^* \ll \lambda$ , площадь поперечного сечения которого равна площади всех отверстий. В общем случае уравнение (20) может быть решено только численными методами. Аналитическое выражение получается для устройства типа резонатора Гельмгольца. Для короткого входного патрубка или отверстий

$$F = \frac{\omega V}{c_{2,0} S} - \frac{\varepsilon_0 c_0^2}{\omega l_0^* c_{2,0}}. \quad (23)$$

Если длина трубы (горла резонатора) мала настолько, что можно пренебречь градиентом температуры, то  $b = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varphi_2 = -\omega l^* / c_{2,0}$ . Тогда из уравнения (20) получается формула

$$\omega = \left( \frac{S}{l^* V} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_0 c_0^2 l^*}{c_{2,0}^2 l_0^*} \right)^{1/2}.$$

Сравнение с выражением (22) для обычного резонатора Гельмгольца, состоящего из емкости и горла, показывает, что наличие патрубка или входных отверстий повышает частоту колебаний.

### 2.3. Потери акустической энергии

Одной из причин поглощения звука является вязкость и теплопроводность газа в пристеночном пограничном слое. Поток акустической энергии, передаваемой ядром потока пограничному слою

$$A_v = \left\langle \int_S \operatorname{Re}(p') \operatorname{Re}(u_y') dS \right\rangle_t, \quad (24)$$

для цилиндрической трубы  $dS = 2\pi R dx$ . На внешней границе пограничного слоя

$$u_y' = u_y \exp(i\omega t), \quad p' = p \exp(i\omega t) \quad \text{тогда выражение (24) принимает вид} \quad (25)$$

$$A_v = \pi R \int_0^l \operatorname{Re}(p) \operatorname{Re}(u_y) dx.$$

Здесь  $u_y$  – амплитуда скорости Ротта для поперечной компоненты акустической скорости

$$u_y = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{n \sqrt{\operatorname{Pr}}} \right) \frac{d}{dx} \left[ u_x \left( \frac{\nu}{i\omega} \right)^{1/2} \right] + \frac{1}{n} \left( \frac{2}{1 + \beta} \frac{1}{\operatorname{Pr} + \sqrt{\operatorname{Pr}}} - \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\operatorname{Pr}}} \right) u_x \frac{d}{dx} \left( \frac{\nu}{i\omega} \right)^{1/2}$$

В ядре потока газ можно считать идеальным, тогда из линеаризованного уравнения Эйлера следует

$p' = \frac{i\rho_0 c^2}{\omega} \frac{\partial u'_x}{\partial x}$ ,  $u'_x = u_x \exp(i\omega t)$ . от высокой теплопроводностью,  $n = 1$ . С учетом сделанных замечаний, после подстановки выражения для  $u_y$  в (28) и интегрирования получается

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \int_0^l \rho_0 (u_x)^2 v^{1/2} dx + \right. \\ \left. + \left( \frac{4}{3(\text{Pr} + \sqrt{\text{Pr}})} - \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \frac{\rho_0 c^2}{\omega^2} \int_0^l u_x \frac{du_x}{dx} \frac{dv^{1/2}}{dx} dx \right] \quad (26)$$

скачкообразное увеличение температуры газа, после чего она изменяется по закону  $T_{2,0}(x)$ . Для газов

$v \sim T_0^{3/2}$ ,  $\rho_0 \sim T_0^{-1}$ . принимает вид

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \rho_{1,0} v_1^{1/2} \left( \int_0^{x^*} u_1^2(x) dx + T_{1,0}^{1/4} \int_{x^*}^l \frac{u_2^2(x) dx}{T_{2,0}(x)} \right) + \right. \quad (27)$$

акус +  $\left( \frac{4}{3(\text{Pr} + \sqrt{\text{Pr}})} - \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \frac{\rho_{1,0} c_1^2}{\omega^2} \frac{v_1^{1/2}}{T_{1,0}^{3/4}} \int_{x^*}^l u_2(x) \frac{du_2}{dx} \frac{dT_{2,0}^{3/4}}{dx} dx \left. \right]$  ние для потока  
процесса

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left[ \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \rho_{1,0} v_1^{1/2} \left( \int_0^{x^*} u_1^2(x) dx + \left( \frac{T_{1,0}}{T_{2,0}} \right)^{1/4} \int_{x^*}^l u_2^2(x) dx \right) \right] \quad (28)$$

В качестве примера рассмотрим трубу, закрытую на входе и открытую на выходе. В этом случае  $u'_1(0, t) = 0$ , тогда  $\varphi_1 = -\pi/2$  и

$$u'_1(x, t) = C_1 \sin(\omega x / c_1) \exp(i\omega t) = u_1(x) \exp(i\omega t) \quad \text{следовательно} \quad \varphi_2 = -\omega l^* / c_2$$

$$u'_2(x, t) = C_2 \cos[\omega(x - l^*) / c_2] \exp(i\omega t) = u_2(x) \exp(i\omega t).$$

После подстановки  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  в выражение (30) и интегрирования получается

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \rho_{1,0} v_1^{1/2} \left[ \frac{C_1^2}{2} \left( x^* - \frac{c_1}{2\omega} \sin \left( \frac{2\omega x^*}{c_1} \right) \right) + \right. \quad (29)$$

содер: +  $\left( \frac{T_{1,0}}{T_{2,0}} \right)^{1/4} \frac{C_2^2}{2} \left( l - x^* + \frac{c_2}{2\omega} \sin \left( \frac{2\omega(l^* - x^*)}{c_2} \right) \right) \left. \right]$  пренебечь членом,

$$A_v = \pi R \left( \frac{\omega}{2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) \rho_{1,0} v_1^{1/2} \frac{C_1^2}{2} \left( l - \frac{c_1}{2\omega} \sin \left( \frac{2\omega l}{c_1} \right) \right).$$



Для трубы, закрытой на входе и открытой на выходе,  $\omega_n = \pi c_1 / l^*$ ; членом, содержащим синус, можно пренебречь, и получается известная формула для трубы, заполненной однородным газом

$$A_v = \frac{\pi R \rho_{1,0} (\omega v_1)^{1/2} l}{2^{3/2}} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right) C_1^2. \quad (30)$$

$\omega_n = 2\pi c_1 / l^*$ , и получается тоже самое выражение.

Пусть скачок температуры расположен на входе, то есть труба заполнена горячим газом с температурой  $T_{2,0}$ . Полагая  $x^* = 0$ , с учетом указанных зависимостей плотности и вязкости газа от температуры, пренебрегая разницей величин  $\gamma$ ,  $\text{Pr}$  для холодного и горячего газов, нетрудно получить формулу, совпадающую с (33) после замены индекса 1 на 2.

Из выражения (30) следует  $A_v \sim (\omega v)^{1/2} \rho_0$ . Гак как  $v \sim T_0^{3/2}$ ,  $\rho_0 \sim T_0^{-1}$  оказывается, что при одинаковой амплитуде колебаний скорости потока поглощение звука в трубе постоянных размеров не зависит от температуры заполняющего ее газа. Если температура изменяется вдоль трубы, но достаточно медленно, в выражении (30) член, содержащий  $dT_{2,0}^{3/4}/dx$ , будет мал по сравнению с остальными. Тогда приближенно можно считать, что поглощение звука в горячем газе с малым градиентом температуры такое же, как и при постоянной температуре. Поток поглощаемой акустической энергии может быть вычислен по упрощенной формуле (30).

Другой причиной, приводящей к потерям акустической энергии, является излучение звука на концах трубы. Поток энергии, выходящий из трубы, определяется выражением

$$A_l = \langle \text{Re}(p'_l) \text{Re}(u'_l) \rangle_t S \quad (31)$$

Возмущения давления и скорости на конце трубы связаны соотношением. Для трубы, открытой на конце, действительная часть импеданса равна

$$X_l = \rho_{l,0} \left( \frac{\omega^2 d^2}{16 c_l} + \frac{u_l}{2} \right) \quad (32)$$

$$u'_l = u_l \exp(i\omega t)$$

С учетом сделанных замечаний и того, что , выражение (34) для потерь акустической энергии на открытом конце трубы после интегрирования принимает вид

$$A_l = \frac{\rho_{l,0} S u_l^2}{4} \left( \frac{\omega^2 d^2}{8c_l} + u_l \right).$$

### **Вопросы:**

1. Колебания газа в трубах с учетом продольного градиента температуры.
2. Установка типа емкость–труба, резонатор Гельмгольца.
3. Потери акустической энергии.

## **Тема 3. Теоретические модели термоакустических колебаний**

### **Лекция 3**

**Аннотация:** В данной главе рассматриваются процессы горения в цилиндрической емкости, протяженность которой мала по сравнению с длиной волны. В результате рассмотрения получено обобщенное условие, связывающее акустические возмущения на границах области теплоподвода в трубе и устройствах типа емкость-труба. Также были получены выражения, позволяющие выполнить качественный анализ условий самовозбуждения звука в установках с тепловыми источниками.

**Ключевые слова:** теплоподвод, горение, идеальный газ, потери, акустическая энергия.

### **Методические рекомендации по изучению темы**

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления о предмете;
- В качестве самостоятельной работы нужно подготовиться к устному опросу;
- Для проверки усвоения темы имеются вопросы к каждой лекции.

### **Литература**

Автоколебания газа в установке с горением. В.М. Ларионов, Р.Г. Зарипов / Изд-во казан. гос. техн. ун-та, 2003. С. 62-75.

### **Глоссарий**

**Гармонические колебания** — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по синусоидальному или косинусоидальному закону.

**Критерий Рэлея** — фазовое условие самовозбуждения термоакустических колебаний газа.

**Поток звуковой энергии**, акустическая мощность — величина, равная отношению звуковой энергии  $dW$ , переносимой упругой средой через заданную поверхность, к интервалу времени  $dt$ , за который эта энергия переносится.

**Труба Рийке** является простейшей экспериментальной установкой для изучения термоакустической неустойчивости, которая основана на возникновении колебаний газа в трубах при подводе тепла.

**Вопросы для изучения:**

1. Получить обобщенное условие, связывающее акустические возмущения на границах области теплоподвода в трубе и устройствах типа емкость-труба.
2. Рассчитать акустическую мощность тепловых источников.
3. Провести анализ самовозбуждения звука в трубе Рийке.
4. Провести анализ поющего пламени Хиггинса.

Был проведен анализ распространения акустических возмущений в трубе постоянного сечения. На некотором участке газу сообщается теплота, которая выделяется при горении, а также посредством теплопередачи от нагретых тел, расположенных в потоке, или от стенок трубы. Предполагалось, что протяженность области теплоподвода мала по сравнению с длиной звуковой волны. Следует заметить, что при горении под область теплоподвода подразумевается начальный участок зоны горения, наиболее чувствительный к возмущениям потока и где наибольшая скорость тепловыделения. Область догорания не учитывается.

В этом случае реальная область теплоподвода заменяется плоскостью (рис. 1, а), разделяющей поток на холодную и горячую части, в которых течения - одномерные, а газ - идеальный. Чтобы связать возмущения скорости потока и давления по обе стороны плоскости теплоподвода, использовались линеаризованные уравнения сохранения импульса и энергии. Уравнение сохранения массы применяется в том случае, если необходимо учитывать

возмущения энтропии. Для малых чисел Маха в обеих частях потока были получены соотношения

$$\begin{aligned} p'_1(x^*, t) &= p'_2(x^*, t), \\ u'_2(x^*, t) - u'_1(x^*, t) &= (B-1)U_{1.0}q' / Q_0 \end{aligned} \quad (1)$$

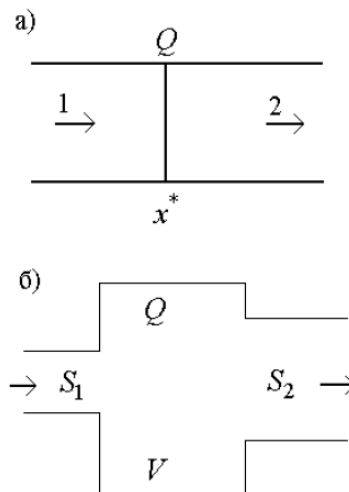


Рис. 1. Идеализация области теплоподвода:

а - плоский тепловой источник; б - тепловыделение в акустической емкости.

Назовем эту схему идеализации моделью Раушенбаха-Мерка. Такой подход не применим к устройствам типа емкость-труба.

Так как известно, что одним из параметров, определяющих характер акустических колебаний и их частоту, является объем емкости, поэтому область теплоподвода не может быть сведена к плоскости разрыва. Кроме того, общая площадь отверстий, через которые газ поступает в емкость, может отличаться от площади поперечного сечения трубы-резонатора.

Рассмотрим следующую схему (рис. 1, б). Горение происходит в цилиндрической емкости, протяженность которой мала по сравнению с длиной волны ( $l_c / \lambda \ll 1$ ). Поток газа на входе и выходе из зоны горения - одномерные, причем  $S_1, S_2 \ll S_c$ . Уравнения сохранения массы, импульса и энергии в интегральной форме, описывающие процессы в зоне горения, имеют вид.

$$\begin{aligned}
\oint \rho \vec{U} d\vec{S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV, \\
\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho U_i dV, \\
\oint \rho \vec{U} \left( \frac{U^2}{2} + c_p T \right) d\vec{S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{U^2}{2} + c_v T \right) dV + Q,
\end{aligned} \tag{2}$$

Интегралы в левых частях первого и третьего уравнений берутся по всей поверхности, ограничивающей область теплоподвода. Во втором уравнении  $\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho U_i U_k$  есть тензор плотности потока  $i$ -й компоненты импульса.

К уравнениям (2) добавляется уравнение состояния идеального газа

$$P = \rho R^* T \tag{3}$$

Представим параметры потока в виде суммы средних (стационарных) величин и бесконечно малых возмущений

$$\begin{aligned}
P &= P_0 + p'(x, t), \quad U = U_0 + u'(x, t), \quad \rho = \rho_0 + \rho'(x, t), \\
T &= T_0 + t'(x, t), \quad Q = Q_0 + q'(x, t).
\end{aligned}$$

Для стационарного течения из (2)

$$\rho_{1,0} U_{1,0} S_1 = \rho_{2,0} U_{2,0} S_2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} = 0, \quad \Pi_{xx} = P_0 + \rho_0 U_{0,x}^2 = \text{const} \quad ,$$

$$\rho_{2,0} U_{2,0} \left( \frac{U_{2,0}^2}{2} + c_{p,2} T_{2,0} \right) S_2 = \rho_{1,0} U_{1,0} \left( \frac{U_{1,0}^2}{2} + c_{p,1} T_{1,0} \right) S_1 + Q_0 \tag{5}$$

Используем известную в акустике формулу для скорости звука  $c^2 = \gamma P_0 / \rho_0$ , тогда

$$P_0 + \rho_0 U_{0,x}^2 = P_0 (1 + \gamma M_0^2)$$

При условии  $M_0 \ll 1$  для обеих частей потока вторым членом в скобках можно пренебречь, то есть

$$P_{1,0} = P_{2,0} = P_{V,0}. \tag{6}$$

Пренебрегая в уравнении (5) членами, содержащими квадраты скоростей, с учетом равенства (4) получаем выражение

$$1 + \frac{Q_0}{\rho_{1,0} U_{1,0} c_{p,1} T_{1,0} S_1} = \frac{c_{p,2} T_{2,0}}{c_{p,1} T_{1,0}} = B \quad (7)$$

В рассматриваемом случае основной перенос импульса происходит по оси  $x$ . Плотность потока импульса  $\Pi_{xx} = P$ , так как членом содержащим  $U_x^2$ , можно пренебречь. Из уравнения сохранения импульса следует

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho U_x) = 0.$$

С учетом того, что для акустических возмущений зависимость от времени описывается функцией  $\exp(i\omega t)$  получается

$$\frac{\partial p'}{\partial x} + i\omega(\rho_0 u'_0 + U_{0,x} \rho' + \rho' u'_x) = 0.$$

Введем безразмерные величины  $P_0, \rho_0, c$ , выбрав в качестве масштабов, как это принято в акустике, и длину области теплоподвода. Тогда  $\bar{p} = p' / P_0$ ,  $\bar{\rho} = \rho' / \rho_0$ ,  $\bar{u}_x = u'_x / c$ ,  $\bar{x} = x / l_c$ . Если учесть, что  $\omega = 2\pi c / \lambda$ , применив формулу для скорости звука, получим

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{i2\pi\gamma l_c}{\lambda} (\bar{u}_x + M_0 \bar{\rho} + \bar{\rho} \bar{u}_x) = 0.$$

Так как  $l_c / \lambda \ll 1$ , второй член содержит величины второго и более высоких порядков малости. Следовательно, в первом приближении

$$p'_1 = p'_2 = p'_V, \quad (8)$$

то есть возмущения давления на входе и выходе из зоны горения равны.

Если в уравнении сохранения энергии (2) отбросить члены, содержащие квадраты скоростей, произведения акустических возмущений, получим

$$c_{p,2} S_2 (\rho_{2,0} T_{2,0} u'_2 + \rho_{2,0} U_{2,0} T'_2 + U_{2,0} T_{2,0} \rho'_2) = c_{p,1} S_1 (\rho_{1,0} T_{1,0} u'_1 + \rho_{1,0} U_{1,0} T'_1 + U_{1,0} T_{1,0} \rho'_1) + \\ + q' - \frac{\partial}{\partial t} \int_V c_V (\rho_0 T' + T_0 \rho') dV \quad (9)$$

Из уравнения состояния (3) следует

$$P_0 = \rho_0 R^* T_0, \quad \rho' = R^* (\rho_0 T' + T_0 \rho'), \quad \bar{p} = \bar{\rho} + \bar{T}. \quad (10)$$

Рассмотрим выражение.

$$\rho_0 T_0 u' + \rho_0 U_0 T' + U_0 T_0 \rho' = \rho_0 T_0 c [\bar{u} + M_0 (\bar{T} + \bar{\rho})] = \rho_0 T_0 c (\bar{u} + M_0 \bar{\rho}).$$

Членом, содержащим число Маха, можно пренебречь. С учетом условия непрерывности давления и второго из выражений (10), заменяя дифференцирование по времени множителем  $i\omega$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{c_v p'}{R^*} dV = \frac{i\omega V c_v p'}{R^*},$$

где -  $c_v, R^*$  средние для области теплоподвода величины.

Поделим уравнение (9) на  $\rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}$ . С учетом сделанных замечаний получим

$$\theta S_2 u'_2 - S_1 u'_1 = \frac{q'}{\rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}} - \frac{i\omega V c_v p'}{\rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}}.$$

Применяя уравнение состояния, условие равенства давлений (6), известные из термодинамики формулы для удельных теплоемкостей, получим

$$\theta = \frac{c_{p,2} \rho_{2,0} T_{2,0}}{c_{p,1} \rho_{1,0} T_{1,0}} = \frac{\gamma_2 (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 (\gamma_2 - 1)}.$$

Обычно с целью упрощения расчетов разницей в показателях адиабаты пренебрегают, тогда  $\theta \approx 1$ . Аналогично

$$\frac{c_v}{R^* \rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}} = \frac{\gamma_1 - 1}{(\gamma - 1) \gamma_1 P_{1,0}} \approx \frac{1}{\rho_{1,0} c_1^2}.$$

С учетом выражения (7)

$$\frac{q'}{\rho_{1,0} c_{p,1} T_{1,0}} = (B - 1) S_1 U_{1,0} q' / Q_0$$

Линеаризованное уравнение сохранения энергии окончательно имеет вид

$$S_2 u'_2 - S_1 u'_1 = \frac{(B - 1) S_1 U_{1,0} q'}{Q_0} - \frac{i\omega V p_i}{\rho_{1,0} c_1^2}. \quad (11)$$

При уменьшении емкости до величины  $V = S_c l_c = S_2 l_c$ , а также при условии  $S_1 = S_2$ , последний член в уравнении (11) будет пропорционален  $l_c p'_1 / \lambda$  и станет величиной второго порядка малости. В этом случае получается выражение (1), соответствующее модели Раушенбаха-Мерка для трубы постоянного сечения.



Итак, получено обобщенное условие, связывающее акустические возмущения на границах области теплоподвода в трубе и устройствах типа емкость-труба.

### 3.2. Акустическая мощность области теплоподвода, условия самовозбуждения колебаний.

Средний за период колебаний поток акустической энергии, проходящий через поверхность, ограничивающую некоторый объем газа, определяется следующим выражением:

$$A = \left\langle \iint \operatorname{Re}(p') \operatorname{Re}(u') dS \right\rangle_t.$$

Для цилиндрической области теплоподвода (рис. 1, б) при условии непрерывности давления (8) получается

$$A = \left\langle \iint \operatorname{Re}(p_1') [\operatorname{Re}(S_2 u_2' - S_1 u_1')] \right\rangle_t = A_2 - A_1 = A_c.$$

Если разница между выходящим и входящим потоками энергии положительна, то  $A_c > 0$  и, следовательно, в области теплоподвода происходит выделение акустической энергии. При  $A_c < 0$  энергия поглощается, а в случае  $A_c = 0$

область теплоподвода нечувствительна к акустическим возмущениям. Ясно, что самовозбуждение колебаний возможно, если область теплоподвода генерирует акустическую энергию, и выполняется условие

$$A_c > A_d \tag{12}$$

Избыток энергии способствует усилению возникающих колебаний. Энергетическое условие (12) и уравнение (5) являются физическим обоснованием одноименного метода.

В начальной стадии акустические возмущения малы, и можно воспользоваться линеаризованным уравнением сохранения энергии (11).

Тогда

$$A = \left\langle \left[ \int \operatorname{Re}(p'_1) \operatorname{Re} \left[ \frac{(B-1)S_1 U_{1,0} q'}{Q_0} - \frac{i\omega V p'_1}{\rho_{1,0} c_1^2} \right] dt \right] \right\rangle.$$

Для установившихся гармонических колебаний  $p'_1 = p + \exp(i\omega t)$ . При усреднении за период колебаний второй член в квадратных скобках приводит к интегралу, содержащему  $\cos \omega t \sin \omega t$ , который равен нулю. Физически это можно объяснить тем, что газ считается идеальным, поэтому при его сжатии акустическая энергия не поглощается. Итак

$$A_c = \frac{(B-1)S_1 U_{1,0}}{Q_0} \langle \operatorname{Re}(p'_1) \operatorname{Re} q' \rangle_t. \quad (13)$$

Эта формула позволяет вычислить акустическую энергию, выделяющуюся за единицу времени (акустическую мощность) вследствие колебаний скорости тепловыделения при горении или периодической теплопередачи от внутренних и внешних тепловых источников.

В общем случае между колебаниями давления и колебаниями скорости тепловыделения существует фазовый сдвиг, зависящий от характера процессов, составляющих механизм обратной связи. Положим  $q' = |q| \exp i(\omega t - \psi)$ . Без учета потерь энергии энергетическое условие самовозбуждения колебаний  $A_c \geq 0$ . После интегрирования выражения (13) это уравнение принимает вид

$$\cos \psi \geq 0, \quad |\psi| \leq \pi / 2.$$

Это критерий Рэлея.

Согласно модели Раушенбаха-Мерка зависимость колебаний скорости теплоподвода от акустических возмущений на входе в область, где расположен тепловой источник, можно представить в виде

$$q' = K_u u'_i + K_p p'_i. \quad (14)$$

Подстановка передаточных функций в формулу (13) дает

$$A_c = \frac{(B-1)S_1 U_{1,0}}{Q_0} \left\langle \operatorname{Re}(p'_1) \operatorname{Re} \left[ |K_u| e^{-i\omega\tau_u} \cdot u'_i + |K_p| e^{-i\omega\tau_p} \cdot p'_i \right] \right\rangle_t.$$

Возмущения скорости потока и давления связаны соотношением  $p'_1 = -Z_1 u'_1$ , где импеданс  $Z_1$  зависит от конкретного вида входной части устройства,

предшествующей области теплоподвода. Из акустики известно, что действительная часть импеданса, обусловленная поглощением звука, намного меньше мнимой ( $X_1 / Y_1 \ll 1$ ). Тогда можно положить  $u'_1 = ip'_1 / Y_1$  и получить

$$A_c = \frac{(B-1)S_1 U_{1,0} p^2}{Q_0} \left\langle \cos \omega t \left[ \frac{|K_u|}{Y_1} \sin(\omega \tau_u - \omega t) + |K_p| \cos(\omega t - \omega \tau_p) \right] \right\rangle_t.$$

При интегрировании по времени исчезнут члены, содержащие  $\cos(\omega t) \sin(\omega t)$ ,  $\cos(2\omega t)$ . Окончательное выражение для акустической мощности области теплоподвода имеет вид

$$A_c = \frac{(B-1)S_1 U_{1,0} p^2}{2Q_0} \left( \frac{|K_u|}{Y_1} \sin \omega \tau_u + |K_p| \cos \omega \tau_p \right). \quad (15)$$

Если колебания скорости тепловыделения возникают вследствие возмущений скорости потока,  $K_p = 0$ . Без учета потерь акустической энергии условие самовозбуждения колебаний имеет вид

$$\sin \omega \tau_u / Y_1 \geq 0. \quad (16)$$

В общем случае импеданс  $Y_1$  может быть как положительным, так и отрицательным. В первом случае

$$u'_1 = (|p'_1| / Y_1) \exp i(\omega t + \pi / 2),$$

то есть колебания скорости потока опережают колебания давления на  $\pi / 2$ .

Автоколебания возникают, если

$$0 \leq \omega \tau_u \leq \pi. \quad (17)$$

При  $Y_1 < 0$   $u'_1 = (|p'_1| / Y_1) \exp i(\omega t - \pi / 2)$ , возмущения скорости потока отстают на  $\pi / 2$  от возмущений давления, а условие самовозбуждения колебаний (16) дает

$$\pi \leq \omega \tau_u \leq 2\pi. \quad (18)$$

В качестве иллюстрации проведем упрощенный анализ самовозбуждения звука в трубе Рийке. Изменение температуры воздуха в трубе не учитывается. В соответствии с выражениями для трубы, открытой на концах, акустические возмущения в сечении, где расположена нагревательная сетка, описываются соотношениями

$$\begin{aligned} u'_1 &= u'(x^*, t) = C \cos(\omega x^* / c_0) \exp(i\omega t), \\ p'_1 &= p'(x^*, t) = -i\rho_0 c_0 C \sin(\omega x^* / c_0) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (19)$$

Ранее отмечалось, что пульсации теплового потока от сетки к проходящему через нее воздуху отстают по фазе от колебаний скорости потока на величину, не превышающую  $\pi/2$ . С учетом условия (16) самовозбуждение звука возможно, если  $Y_1 > 0$ . Для первой гармоники  $\omega_1 = \pi c_0 / l^*$ ,

$$Y_1 = \rho_0 c_0 t g(\omega_1 x^* / c_0) = \rho_0 c_0 t g(\pi x^* / l^*) > 0.$$

Отсюда следует, что явление Рийке наблюдается, если сетка расположена в нижней половине трубы,  $0 < x^* / l^* < 0,5$ .

При фиксированных параметрах трубы, сетки и воздушного потока акустическая энергия, сообщаемая газу от нагретой сетки, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний давления, как это следует из выражения (15). Из формул (19) видно, что амплитуда колебаний давления в сечении, где расположена сетка, пропорциональна  $\sin(\omega_1 x^* / c_0)$ . Дифференцируя  $A_c$  по  $x^*$ , приравнявая производную нулю, получим, что колеблющийся поток воздуха получает максимальную акустическую энергию, если сетка расположена на расстоянии, приблизительно равном четверти длины трубы от нижнего конца:  $(x^* = l^* / 4)$ . В этом случае условия для поддержания колебаний наиболее благоприятные, а амплитуда акустических колебаний будет максимальной. Полученные результаты соответствуют реальным свойствам эффекта Рийке.

Рассмотрим второй частный случай, когда колебания скорости тепловыделения возникают из-за возмущений давления в зоне горения, то есть  $K_u = 0$ . Без учета потерь самовозбуждение колебаний происходит, если  $A_c \geq 0$ , а с учетом выражения (15) - при условии

$$\begin{aligned} \cos(\omega \tau_p) &\geq 0, \\ 0 \leq \omega \tau_p &\leq \pi / 2, \quad 3\pi / 2 \leq \omega \tau_p \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (20)$$

Проведем анализ поющего пламени Хиггинса.

Пусть водород подается в газоподающую трубку через клапан. Звуковые волны из трубы-резонатора проникают в трубку через верхний открытый конец,

который примем за начало координат. На конце, где расположен клапан, газоподающая трубка акустически закрыта ( $u'_T(L, t) = 0$ ), а в выражениях  $\varphi = -\omega L / c_0 \pm \pi / 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} u'_T(0, t) &= C_T \cos(\pm \pi / 2 - \omega L / c_0) \exp(i\omega t), \\ p'_T(0, t) &= -i\rho_0 c_0 C_T \sin(\pm \pi / 2 - \omega L / c_0) \exp(i\omega t). \end{aligned}$$

Скорость истечения водорода имеет направление, противоположное скорости на открытом конце газоподающей трубки. Акустическое давление в этом месте равно звуковому давлению в сечении  $x^*$  трубы-резонатора, где происходит истечение и начинается диффузионное горение водорода:  $p'_T(0, t) = p'(x^*, t)$ . Тогда

$$u'_b = -u'_T(0, t) = -itg(\omega L / c_0) p'(x^*, t).$$

Колебания скорости истечения приведут к изменениям количества сгорающего газа, а, следовательно, к периодическим изменениям скорости тепловыделения. Колебания скорости тепловыделения будут происходить с некоторым запаздыванием относительно пульсаций скорости истечения. Эта задержка вызвана необходимостью перестройки гидродинамической и диффузионной структур пламени, конечной скоростью химических реакций.

Таким образом

$$q' = K_u u'_b = -i |K_u| tg(\omega L / c_0) p'(x^*, t) \exp(-i\omega \tau_u).$$

Вместе с тем

$$q' = |K_p| p'(x^*, t) \exp(-i\omega \tau_p).$$

В зависимости от длины газоподающей трубки возможны два варианта

$$\begin{aligned} \omega \tau_p &= \omega \tau_u + \pi / 2, \text{ если } tg(\omega L / c_0) > 0, \\ \omega \tau_p &= \omega \tau_u - \pi / 2, \text{ если } tg(\omega L / c_0) < 0. \end{aligned}$$

Для водорода, имеющего высокую скорость горения, можно предположить, что время запаздывания горения  $\tau_u$  меньше половины периода колебаний, то есть  $0 \leq \omega \tau_u \leq \pi$ . В этом случае условие самовозбуждения колебаний (20) выполняется, если  $tg(\omega L / c_0) < 0$ . С учетом того, что  $\omega = 2\pi c_0 / \lambda$ ,

поющее пламя наблюдается тогда, когда длина газоподающей трубки удовлетворяет условию

$$1/2 < 2L/\lambda - m < 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Амплитуда колебаний скорости тепловыделения прямо пропорциональна амплитуде звукового давления в сечении, где расположено пламя. Для трубы, открытой на концах,  $|p'(x^*, t)| \propto |\sin(\omega_n x^* / c_0)|$ ,  $\omega_n = c_0 n / l$ ; тогда колебания будут наиболее интенсивными, если  $x^* = 1/2n$ , то есть когда пламя расположено в пучностях давления, что совпадает с известными опытными данными.

Проведенный анализ показал, что условия самовозбуждения колебаний в трубе существенным образом зависят от местоположения плоскости теплоподвода. В выражении (15) этот фактор в явном виде не учитывается. Используя условие непрерывности (1) и выражения для акустических возмущений в холодном газе, получим

$$p_* = |p'_1(x^*, t)| = \rho_{1,0} c_1 |C_1| \left| \sin \left( \frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1 \right) \right|,$$

$$Y_{1,*} = Y_1 = i p'_1(x^*, t) / u'_1(x^*, t) = \rho_{1,0} c_1 t g \left( \frac{\omega x^*}{c_1} + \varphi_1 \right).$$

После подстановки этих соотношений в формулу (15) выражение для акустической мощности области теплоподвода принимает вид

$$A_c = \frac{(B-1)S_1 U_{1,0} p_{1,m}^2}{2Q_0} \left\{ \frac{|K_u| \sin(\omega \tau_u) \sin[2(\omega x^* / c_1 + \varphi_1)]}{2\rho_{1,0} c_1} + \right. \\ \left. + |K_p| \cos(\omega \tau_p) \sin^2(\omega x^* / c_1 + \varphi_1) \right\} \quad p_{1,m} = \rho_{1,0} c_1 |C_1|. \quad (21)$$

Для устройств, схема которых представлена на рис. 1,б, расположение области теплоподвода не меняется,  $p_*$  - амплитуда колебаний давления газа в емкости, а формула (15) сохраняет свой вид.

Таким образом, без учета потерь акустической энергии выражения (12), (15), (21) позволяют достаточно просто выполнить качественный анализ условий самовозбуждения звука в установках с тепловыми источниками. Поскольку тип источника энергии, способ теплоподвода к газу, механизм

обратной связи не конкретизируются, условия (16) - (18), (20) имеют достаточно общий характер.

**Вопросы:**

1. Получить обобщенное условие, связывающее акустические возмущения на границах области теплоподвода в трубе и устройствах типа емкость-труба.
2. Рассчитать акустическую мощность тепловых источников.
3. Провести анализ самовозбуждения звука в трубе Рийке.
4. Провести анализ поющего пламени Хиггинса.

## Тема 4. Теория явления Рийке

### Лекция 4

**Аннотация:** В данной главе рассматривается общая методика теоретического исследования процесса возбуждения термических автоколебаний, дается теория возбуждения эффекта Рийке, проводится сопоставление теории и эксперимента.

**Ключевые слова:** эффект Рийке, открытая труба, нагреватель, поток газа, автоколебания, область возбуждения.

#### Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления о предмете;
- В качестве самостоятельной работы нужно подготовиться к устному опросу;
- Для проверки усвоения темы имеются вопросы к каждой лекции.

#### Литература

Теория термических автоколебаний. Р.Г. Галиуллин, И.П. Ревва, Г.Г. Халимов / Издательство казанского университета, 1982. С. 85-106.

#### Глоссарий

**Нагреватель** — устройство для нагревания (обогрева) чего-либо.

**Труба Рийке** является простейшей экспериментальной установкой для изучения термоакустической неустойчивости, которая основана на возникновении колебаний газа в трубах при подводе тепла.

#### Вопросы для изучения:

1. В чем особенности данного эффекта?
2. Описать эксперимент.
3. Произвести теоретический расчет эффекта Рийке.

Интересным случаем термических автоколебаний является эффект Рийке, т.е. генерация звука в открытой с обоих концов трубе, в которой находится внутренний источник тепла, при наличии потока газа через нагреватель.



Характерной особенностью эффекта является замкнутость областей возбуждения колебаний, т.е. прекращение колебаний при достаточно больших и достаточно малых скоростях потока. Наиболее удачную теорию эффекта Рийке предложил Раушенбах. Но он воспользовался решением Лайтхилла задачи о теплообмене одиночной проволоки в бесконечном пространстве при наложенных звуковых колебаниях. Использование этих результатов для случая сетки, которая служит источником тепла в трубе, как указывал сам Раушенбах, может дать только качественное представление о явлении. К тому же указанные результаты не позволяют построить замкнутые области возбуждения колебаний, то есть не объясняют прекращение колебаний при малых скоростях потока. Оценка показывает, что объяснение нижних пределов пульсации температуры нагревателя возможно лишь при нагревательных элементах небольшого размера.

Предлагаемая теория эффекта Рийке хорошо описывает закономерности областей возбуждения колебаний.

Рассмотрим открытую с обоих концов трубу длиной  $L$  и диаметром  $D$ , внутри которой на расстоянии  $\delta$  от входа (рис. 1) установлена пластинчатая сетка, состоящая из параллельных, расположенных на расстоянии  $2a$  друг от друга и соединенных электрически последовательно пластин.

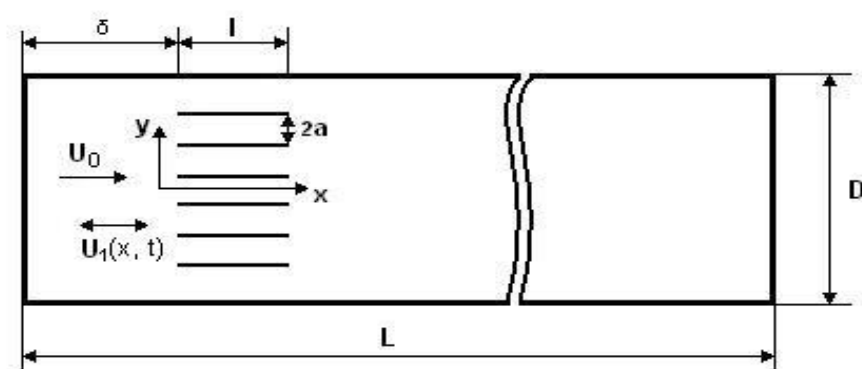


Рис. 1  
Схема эффекта Рийке

Система разогревается электрическим током мощностью  $W$  до температуры  $T_w$ . Газ в трубе движется с небольшой постоянной скоростью  $U_0$ . Предположим, что в трубе возникли колебания, гармонические по форме и с частотой, соответствующей основной гармонике трубы, причем пульсации скорости  $U_1(x, t)$  малы по сравнению с  $U_0$ . Положим также, что жидкость несжимаема, так как условие  $U_\infty/\omega\lambda_0 \ll 1$  выполняется, когда размеры пластин малы по сравнению с длиной волны, т.е.  $d \ll \lambda_0$ , где  $d$  – длина пластины. При прохождении через нагреватель газ нагревается не более, чем на  $100 \div 150$  °С, поэтому будем считать, что параметры газа при этом не изменяются.

Рассмотрим процессы, которые происходят в каналах, составленных пластинами нагревателя. Введем координаты  $x, y$ , как показано на рис.1. Тогда пульсации давления  $p_1(x, t)$  и скорости  $U_1$  в ядре течения имеют вид

$$p_1(x, t) = -i\rho c U_\infty \sin k(\delta + x)e^{i\omega t}, \quad (1)$$

$$U_1(x, t) = U_\infty \cos k(\delta + x)e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Течение и теплообмен в канале описываются известными уравнениями ламинарного пограничного слоя для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u, v$  – компоненты скорости в пограничном слое,  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Граничные условия задаются следующим образом: на пластинах, ограничивающих канал,  $u = 0$ ,  $T = T_w$  вдали от пластин  $u = U = \bar{U} + U_1(x, t)$ ,  $T = T_\infty$ .

Представим скорость и температуру в виде суммы осредненных по времени частей  $u_0$ ,  $T_0$  и пульсационных составляющих  $u_1$ ,  $T_1$ . Положим, что  $u_0 > u_1$ ,  $T_0 > T_1$ . Скорость ядра потока  $U$  также состоит из двух слагаемых  $U = \bar{U}(x) + U_1(x, t)$ . Тогда система уравнений (3) распадается на две. Для стационарного основного течения, отбрасывая малые члены, получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad (3a)$$

$$u \frac{\partial u_0}{\partial x} + v \frac{\partial u_0}{\partial y} = \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \quad (3б)$$

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} = u_0 \frac{\partial T_0}{\partial y^2}. \quad (3в)$$

С граничными условиями

$$u_0 = v_0 = 0, \quad T = T_w, \quad y = 0,$$

$$u_0 = \bar{U}(x), \quad T_0 = T_\infty, \quad y \rightarrow \infty.$$

Нестационарное течение характеризуется системой

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (4б)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = u_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}. \quad (4в)$$

С граничными условиями

$$u_1 = v_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad y = 0,$$

$$u_0 = U_1(x, t), \quad T_1 = 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим систему уравнений (3а-3в). Решение уравнения (3б) для случая плоскопараллельного течения в начальном участке канала было выполнено Шлихтингом. Физически этот процесс представляется следующим образом. У входа в канал скорость потока по всей ширине одинакова и равно  $U_0$ . Вследствие трения на обеих стенках канала образуется пограничный слой, который сначала, т.е. на небольших расстояниях от входа в канал, развивается

так же, как на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. В результате течение в канале разбивается на три зоны: центральную, в которой жидкость движется на некотором участке ширины канала с одинаковой скоростью – ядро течения, и на две боковые, образованные пограничными слоями. Так как через каждое поперечное сечение должно протекать одинаковое количество жидкости, то уменьшение расхода вследствие трения в боковых зонах компенсируется увеличением расхода в центральной, т.е. увеличением скорости в ядре течения.

Ускорение движения ядра течения оказывает влияние на развитие пограничных слоев. Постепенно их рост приводит к тому, что они сливаются и устанавливается шарообразный профиль Гагена-Пунзейля.

Для аналитического исследования развития течения в начальном участке канала Шлихтинг использовал два способа, названные «подход спереди» и «подход сзади». Подход спереди заключается в исследовании развития пограничного слоя под действием ускоренного течения в ядре. При подходе сзади определяется отклонение распределения скоростей от параболического по мере приближения к входному сечению. Результаты представляются в виде рядов, и эти ряды сращиваются в некотором промежуточном сечении.

Ограничимся подходом спереди, считая его точность достаточной для данной приближенной теории.

Скорость ядра осредненного течения  $U(x)$  представляется в виде ядра

$$\bar{U}(x) = U_0(1 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \dots), \quad (5)$$

Где  $\varepsilon = \sqrt{\nu x / U_0 a^2}$  – малый параметр.

Тогда функцию тока  $\varphi_0(x, y)$  и скорости  $u_0, v_0$  можно представить в виде аналогичных рядов

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= U_0 a \left[ \varepsilon f_0(\eta) + \varepsilon^2 f_1(\eta) + \varepsilon^2 f_2(\eta) + \dots \right], \\ u_0(x, y) &= U_0 \left[ f_0'(\eta) + \varepsilon f_1'(\eta) + \varepsilon^2 f_2'(\eta) + \dots \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$v_0(x, y) = -\frac{U_0 a}{2x} [\varepsilon f_0 - \varepsilon \eta f_0' - 2\varepsilon^2 f_1 - \varepsilon^2 \eta f_1' + 3\varepsilon^2 f_2 - \varepsilon^3 \eta f_2' + \dots],$$

где  $\eta = \sqrt{U_0 / \nu xy}$ .

Подставив выражения (5), (6) в систему уравнений (3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему дифференциальных уравнений для определения  $f_0, f_1, f_2$ . Для нулевого приближения имеем

$$f_0 f_0'' + 2f_0''' = 0 \quad (7)$$

Граничные условия запишутся в виде

$$f_0 = f_0' = 0, \quad \eta = 0, \quad (8)$$

$$f_0' = 1, \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Уравнение (7) с граничными условиями (8), которое описывает обтекание пластины потоком, было получено Блазиусом. Его численное решение представлено в таблицах. Для дальнейших выкладок необходимо иметь аналитическое выражение этого решения. Представим его приближенно в виде полинома

$$f_0 = 0,1615\eta^2 - 0,00125\eta^4$$

Первые производные  $f_0', f_0''$  тогда имеют вид

$$f_0' = 0,323\eta - 0,005\eta^2,$$

$$f_0'' = 0,323 - 0,01\eta.$$

Интервал изменения  $\eta$  при это заменяется на отрезок  $[0; 4,64]$ .

Дифференциальное уравнение для первого приближения имеет вид

$$2f_1''' + f_0 f_1'' - f_0' f_1' + 2f_0'' f_1 = -k_1, \quad (9)$$

Граничные условия

$$f_1 = f_1' = 0, \quad \eta = 0, \quad f_1' = k_1, \quad \eta = 4,64.$$

Аналогично для  $f_2$  имеем

$$2f_2''' + f_0 f_2'' - 2f_0' f_2' + 3f_0'' f_2 = 2k_2 - k_1^2 + 2f_1 f_1'' = f_1'^2 \quad (10)$$

С граничными условиями

$$f_2 = f_2' = 0, \quad \eta = 0, \quad f_2' = k_2, \quad \eta = 4,64.$$

Как видим, разложения (5) приводят к уравнениям, очень быстро усложняющимся по мере роста показателя степени  $\varepsilon$ . С целью сокращения вычислительной работы разобьем участок разгона на два так, что скорость в ядре течения при малых  $\varepsilon \leq 0,2$  представляется как

$$\bar{U} = U_0(1 + k_1\varepsilon), \quad k_1 = 2.$$

На втором участке разгона при  $0,2 \leq \varepsilon \leq 0,4$

$$\bar{U} = U_0(k_0 + k_2\varepsilon^2), \quad k_0 = 1,38, \quad k_2 = 0,75.$$

С учетом такого разбиения было получено численное решение (9) для  $k_1 = 2$ . Для второго участка разгона решается (10) при  $k_2 = 0,75$ ,  $f_1 = 0$ .

Рассмотрим уравнение (3в)

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} - a_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}, \quad (11)$$

$$T_0 = T_w, \quad y = 0; \quad T_0 = T_\infty(x), \quad y \rightarrow \infty,$$

Где  $y$  — координата, отсчитываемая от стенки. По аналогии с динамическим пограничным слоем, получим (положив  $Pr = 1$ )

$$v_{00}'' + 0,5 f_0' v_{00}' = 0, \quad \text{где } v_{00} = \frac{(T_{00} - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)}. \quad (12)$$

Решение даст известное уравнение Польгаузена для теплообмена плоской пластины

$$v_{00} = 1 - f_0^1 \quad (12a)$$

в соответствии с принятыми допущениями

$$v_{00} = 1 - 0,323\eta + 0,005\eta^3, \quad 0 \leq \eta \leq 4,64. \quad (13)$$

Для первого участка разгона

$$T_\infty(x) = T_\infty + k_1\varepsilon(T_w - T_\infty),$$

При граничных условиях

$$v_{01} = 0, \quad \eta = 0; \quad v_{01} = k_1, \quad \eta = 4,64.$$

Рассмотрим второй участок разгона. В этом случае  $0,2 \leq \varepsilon \leq 0,4$

$$T_\infty(x) = k_0 T_\infty + k_2 \varepsilon^2 (T_w - T_\infty).$$

Рассмотрим стационарный теплообмен после того, как установился параболический профиль скоростей, т.е. при  $\varepsilon > 0,4$ .

Уравнение (11) принимает вид при  $Pr = 1$ .

$$\frac{3}{2}U_0(1-\frac{y'^2}{a^2})\frac{\partial T_0}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 T_0}{\partial y'^2}, \quad (14)$$

Где  $y'$  - расстояние от центра канала,  $x$  – осевая координата, отсчитываемая от точки, соответствующей  $\varepsilon = 0,4$ . Положим, что температура стенки подчиняется зависимости [12]

$$T_w^* = T_w + Ax,$$

Тогда температуру потока ищем в виде

$$T_0 = Ax + g(\xi_0), \quad \xi_0 = y' / a.$$

Подставив в (14), получим

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_0^2} = B(1-\xi_0^2), \quad B = \frac{3}{2}U_0 \frac{a^2}{\nu} A. \quad (15)$$

При граничных условиях

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_0} = 0, \quad \xi_0 = 0; \quad g = T_w, \quad \xi_0 = 1.$$

Решение (15) легко получить

$$T_0 = Ax + B\left(\frac{\xi_0^2}{2} - \frac{\xi_0^4}{12}\right) + T_w - \frac{5}{12}B. \quad (16)$$

Константы  $A$  и  $B$  можно определить из условия равенства температур в ядре потока при  $\varepsilon = 0,4$ ,  $x = 0$

$$k_0 T_\infty + 0,16k_2(T_w - T_\infty) = T_w - \frac{5}{12}B,$$

Откуда

$$A = \frac{8\nu(T_w - T_\infty)}{5U_0 a^2} \left[1 - \frac{(k_0 - 1)T_\infty}{T_w - T_\infty} - 0,16k_2\right], \quad (17)$$

$$B = \frac{12}{5}(T_w - T_\infty) \left[1 - \frac{(k_0 - 1)T_\infty}{T_w - T_\infty} - 0,16k_2\right].$$

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} = u_0 \frac{\partial T_0}{\partial y^2}. \quad (3в)$$

С граничными условиями

$$u_0 = v_0 = 0, \quad T = T_w, \quad y = 0,$$

$$u_0 = \bar{U}(x), \quad T_0 = T_\infty, \quad y \rightarrow \infty.$$

Нестационарное течение характеризуется системой

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (4б)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial y} = u_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}. \quad (4в)$$

С граничными условиями

$$u_1 = v_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad y = 0,$$

$$u_0 = U_1(x, t), \quad T_1 = 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим систему уравнений (3а-3в). Решение уравнения (3б) для случая плоскопараллельного течения в начальном участке канала было выполнено Шлихтингом. Физически этот процесс представляется следующим образом. У входа в канал скорость потока по всей ширине одинакова и равно  $U_0$ . Вследствие трения на обеих стенках канала образуется пограничный слой, который сначала, т.е. на небольших расстояниях от входа в канал, развивается так же, как на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении. В результате течение в канале разбивается на три зоны: центральную, в которой жидкость движется на некотором участке ширины канала с одинаковой скоростью – ядро течения, и на две боковые, образованные пограничными слоями. Так как через каждое поперечное сечение должно протекать одинаковое количество жидкости, то уменьшение расхода вследствие трения в боковых зонах компенсируется увеличением расхода в центральной, т.е. увеличением скорости в ядре течения.

Ускорение движения ядра течения оказывает влияние на развитие пограничных слоев. Постепенно их рост приводит к тому, что они сливаются и устанавливается шарообразный профиль Гагена-Пунзейля.



Для аналитического исследования развития течения в начальном участке канала Шлихтинг использовал два способа, названные «подход спереди» и «подход сзади». Подход спереди заключается в исследовании развития пограничного слоя под действием ускоренного течения в ядре. При подходе сзади определяется отклонение распределения скоростей от параболического по мере приближения к входному сечению. Результаты представляются в виде рядов, и эти ряды сращиваются в некотором промежуточном сечении.

Ограничимся подходом спереди, считая его точность достаточной для данной приближенной теории.

Скорость ядра осредненного течения  $U(x)$  представляется в виде ядра

$$\bar{U}(x) = U_0(1 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \dots), \quad (5)$$

Где  $\varepsilon = \sqrt{\nu x / U_0 a^2}$  – малый параметр.

Тогда функцию тока  $\varphi_0(x, y)$  и скорости  $u_0, v_0$  можно представить в виде аналогичных рядов

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= U_0 a [\varepsilon f_0(\eta) + \varepsilon^2 f_1(\eta) + \varepsilon^2 f_2(\eta) + \dots], \\ u_0(x, y) &= U_0 [f_0'(\eta) + \varepsilon f_1'(\eta) + \varepsilon^2 f_2'(\eta) + \dots], \end{aligned} \quad (5)$$

$$v_0(x, y) = -\frac{U_0 a}{2x} [\varepsilon f_0 - \varepsilon \eta f_0' - 2\varepsilon^2 f_1 - \varepsilon^2 \eta f_1' + 3\varepsilon^2 f_2 - \varepsilon^3 \eta f_2' + \dots],$$

где  $\eta = \sqrt{U_0 / \nu xy}$ .

Подставив выражения (5), (6) в систему уравнений (3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему дифференциальных уравнений для определения  $f_0, f_1, f_2$ . Для нулевого приближения имеем

$$f_0 f_0'' + 2f_0''' = 0 \quad (7)$$

Граничные условия запишутся в виде

$$f_0 = f_0' = 0, \quad \eta = 0, \quad (8)$$

$$f_0' = 1, \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Уравнение (7) с граничными условиями (8), которое описывает обтекание пластины потоком, было получено Блазиусом. Его численное решение

представлено в таблицах. Для дальнейших выкладок необходимо иметь аналитическое выражение этого решения. Представим его приближенно в виде полинома

$$f_0 = 0,1615\eta^2 - 0,00125\eta^4$$

Первые производные  $f_0'$ ,  $f_0''$  тогда имеют вид

$$f_0' = 0,323\eta - 0,005\eta^3,$$

$$f_0'' = 0,3230 - 0,015\eta^2.$$

Интервал изменения  $\eta$  при это заменяется на отрезок  $[0; 4,64]$ .

Дифференциальное уравнение для первого приближения имеет вид

$$2f_1''' + f_0f_1'' - f_0'f_1' + 2f_0''f_1 = -k_1. \quad (9)$$

Граничные условия

$$f_1 = f_1' = 0, \quad \eta = 0, \quad f_1' = k_1, \quad \eta = 4,64.$$

Аналогично для  $f_2$  имеем

$$2f_2''' + f_0f_2'' - 2f_0'f_2' + 3f_0''f_2 = 2k_2 - k_1^2 + 2f_1f_1'' = f_1'^2 \quad (10)$$

С граничными условиями

$$f_2 = f_2' = 0, \quad \eta = 0, \quad f_2' = k_2, \quad \eta = 4,64.$$

Как видим, разложения (5) приводят к уравнениям, очень быстро усложняющимся по мере роста показателя степени  $\varepsilon$ . С целью сокращения вычислительной работы разобьем участок разгона на два так, что скорость в ядре течения при малых  $\varepsilon \leq 0,2$  представляется как

$$\bar{U} = U_0(1 + k_1\varepsilon), \quad k_1 = 2.$$

На втором участке разгона при  $0,2 \leq \varepsilon \leq 0,4$

$$\bar{U} = U_0(k_0 + k_2\varepsilon^2), \quad k_0 = 1,38, \quad k_2 = 0,75.$$

С учетом такого разбиения было получено численное решение (9) для  $k_1 = 2$ . Для второго участка разгона решается (10) при  $k_2 = 0,75$ ,  $f_1 = 0$ .

Рассмотрим уравнение (3в)

$$u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial y} - a_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}, \quad (11)$$

$$T_0 = T_w, \quad y = 0; \quad T_0 = T_\infty(x), \quad y \rightarrow \infty,$$

Где  $y$  – координата, отсчитываемая от стенки. По аналогии с динамическим пограничным слоем, получим (положив  $Pr = 1$ )

$$v_{00}'' + 0,5 f_0' v_{00}' = 0, \quad \text{где} \quad v_{00} = \frac{(T_{00} - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)}. \quad (12)$$

Решение даст известное уравнение Польгаузена для теплообмена плоской пластины

$$v_{00} = 1 - f_0^1 \quad (12a)$$

в соответствии с принятыми допущениями

$$v_{00} = 1 - 0,323\eta + 0,005\eta^3, \quad 0 \leq \eta \leq 4,64. \quad (13)$$

Для первого участка разгона

$$T_\infty(x) = T_\infty + k_1 \varepsilon (T_w - T_\infty),$$

При граничных условиях

$$v_{01} = 0, \quad \eta = 0; \quad v_{01} = k_1, \quad \eta = 4,64.$$

Рассмотрим второй участок разгона. В этом случае  $0,2 \leq \varepsilon \leq 0,4$

$$T_\infty(x) = k_0 T_\infty + k_2 \varepsilon^2 (T_w - T_\infty).$$

Рассмотрим стационарный теплообмен после того, как установился параболический профиль скоростей, т.е. при  $\varepsilon > 0,4$ .

Уравнение (11) принимает вид при  $Pr = 1$ .

$$\frac{3}{2} U_0 \left(1 - \frac{y'^2}{a^2}\right) \frac{\partial T_0}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 T_0}{\partial y'^2}, \quad (14)$$

Где  $y'$  – расстояние от центра канала,  $x$  – осевая координата, отсчитываемая от точки, соответствующей  $\varepsilon = 0,4$ . Положим, что температура стенки подчиняется зависимости [12]

$$T_w^* = T_w + Ax,$$

Тогда температуру потока ищем в виде

$$T_0 = Ax + g(\xi_0), \quad \xi_0 = y' / a.$$

Подставив в (14), получим

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_0^2} = B(1 - \xi_0^2), \quad B = \frac{3}{2} U_0 \frac{a^2}{\nu} A. \quad (15)$$

При граничных условиях

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_0} = 0, \quad \xi_0 = 0; \quad g = T_w, \quad \xi_0 = 1.$$

Решение (15) легко получить

$$T_0 = Ax + B\left(\frac{\xi_0^2}{2} - \frac{\xi_0^4}{12}\right) + T_w - \frac{5}{12} B. \quad (16)$$

Константы А и В можно определить из условия равенства температур в ядре потока при  $\varepsilon = 0,4$ ,  $x = 0$

$$k_0 T_\infty + 0,16k_2(T_w - T_\infty) = T_w - \frac{5}{12} B,$$

Откуда

$$A = \frac{8\nu(T_w - T_\infty)}{5U_0 a^2} \left[1 - \frac{(k_0 - 1)T_\infty}{T_w - T_\infty} - 0,16k_2\right], \quad (17)$$

$$B = \frac{12}{5} (T_w - T_\infty) \left[1 - \frac{(k_0 - 1)T_\infty}{T_w - T_\infty} - 0,16k_2\right].$$

### Вопросы:

1. В чем особенности данного эффекта?
2. Описать эксперимент.
3. Произвести теоретический расчет эффекта Рийке.

## **Тема 5. Возбуждение звука в неравномерно нагретом резонаторе Гельмгольца**

### **Лекция 5**

**Аннотация:** В данной главе рассматривается общая методика теоретического исследования процесса возбуждения термических автоколебаний в неравномерно нагретом резонаторе Гельмгольца, проводится сопоставление теории и эксперимента.

**Ключевые слова:** резонатор Гельмгольца, емкость+труба, поток газа, автоколебания, область возбуждения.

#### **Методические рекомендации по изучению темы**

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления о предмете;
- В качестве самостоятельной работы нужно подготовиться к устному опросу;
- Для проверки усвоения темы имеются вопросы к каждой лекции.

#### **Литература**

Теория термических автоколебаний. Р.Г. Галиуллин, И.П. Ревва, Г.Г. Халимов / Издательство казанского университета, 1982. С. 106-118.

#### **Глоссарий**

**Резонатор Гельмгольца** (акустический резонатор) — акустический прибор, сосуд сферической формы с открытой горловиной. Изобретен Гельмгольцем около 1850 г. для анализа акустических сигналов, теория разработана Г. Гельмгольцем и Дж. Рэлеем

Профессор **Казимир Францевич ТЕОДОРЧИК** /1891-1968 гг./ плодотворно работал в Московском университете около пятидесяти лет, начиная с 1919 г. по 1968 г. Вся основная его педагогическая и научная деятельность связана с физическим факультетом МГУ.

К.Ф. Теодорчик один из создателей научной школы, разрабатывающей проблемы колебаний в нелинейных и линейных системах самой различной физической природы. Он был блестящим ученым, педагогом и лектором. Много сил и энергии уделял он подготовке и воспитанию

высококвалифицированных научных кадров в различных областях физики и, особенно, в области физики колебаний и радиофизики.

К.Ф. Теодорчик работал в МГУ с 1919 г., сначала на кафедре физики физико-математического факультета, затем на кафедре колебаний физического факультета МГУ, с момента её создания в 1931 г., до своей смерти в 1968 г. Семнадцать лет, с 1939 по 1956 гг., он заведовал этой кафедрой.

**Резонатор** — колебательная система, в которой происходит накопление энергии колебаний за счёт резонанса с вынуждающей силой. Обычно резонаторы обладают дискретным набором резонансных частот. В технике обычно встречаются резонаторы с колебанием электромагнитных или механических величин. Конструкция резонатора сильно зависит от его резонансных частот.

### **Вопросы:**

1. Что представляет собой резонатор Гельмгольца.
2. Произвести расчет резонатора Гельмгольца.

Резонатор Гельмгольца, представляющий собой объем с присоединенной трубой с горлом, является классической акустической системой, в которой при наличии добавки энергии возникают автоколебания. Если стенки резонатора поддерживать нагретыми, то система может генерировать звуковые колебания, которые тоже относятся к колебаниям, возбуждаемым теплоподводом.

Наиболее известное теоретическое объяснение данного вида автоколебаний предложил Теодорчик. Он рассматривал колебания воздушного поршня в горле резонатора в одномерном представлении, полагая, что колебания температуры поршня являются источником энергии автоколебаний, и получил выражения для частоты и амплитуды автоколебаний. Однако результаты для амплитуды невозможно сравнить с экспериментом, так как в коэффициенте пропорциональности между смещением частиц и температурой воздушной пробки, входящем в окончательное выражение и

заключается механизм возбуждения колебаний. Другим недостатком исследования является заведомо грубое приближение, которое было сделано при замене всей массы газа, заполняющего горло резонатора, лишь небольшой ее частью, находящейся в зоне температурного градиента.

Предлагаемая теория термических автоколебаний в резонаторе Гельмгольца дает возможность получить количественные результаты, которые можно сравнивать с экспериментом.

Рассмотрим резонатор, состоящий из объема  $V$  с присоединенным к нему длинным горлом круглого сечения с радиусом  $r$ , длиной горла  $L$  ( $R \ll L$ ).

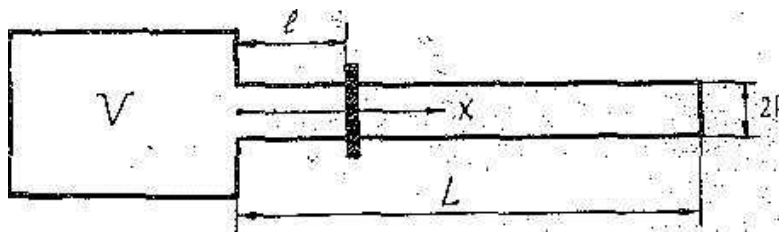


Рис.1

#### Схема резонатора Гельмгольца

Если резонатор поддерживать при температуре, равной температуре окружающей среды  $T_\infty$ , то в горле могут возникать колебания со скоростью в ядре потока

$$U_1 = U_\infty \cos(k_\infty(L-x))e^{i\omega_\infty t}$$

И давлением

$$P_\infty = i\rho_\infty c_\infty u_\infty \sin(k_\infty(L-x))e^{i\omega_\infty t},$$

где  $\rho_\infty c_\infty$  - плотность воздуха и скорость звука при температуре окружающей среды, соответственно,  $k_\infty$ - волновое число,  $u_\infty$  - циклическая частота колебаний, при этом геометрические размеры, частота колебаний и скорость звука, связаны соотношением.

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_\infty L}{C_\infty} = \frac{C_\infty S}{V\omega_\infty}, \quad (0)$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения горла.

Эксперименты показывают, что при автоколебаниях, стенки объема резонатора поддерживаются нагретыми до температуры в 1,5-2 раза превышающей температуру окружающей среды  $T_c$ . Тогда в горле установится неравномерное, температурное поле, связь которого с полем плотности при постоянном давлении.

Неравномерное температурное поле в горле изменит акустические свойства горла, и, строго говоря, пульсации давления. К сожалению, нам не известны аналитические выражения для распределения пульсаций, давления и скорости в канале с неравномерным распределением температуры со столь сильным градиентом температуры вдоль оси горла. Тем не менее представляется разумным считать, что на акустические свойства системы (в ядре потока) температурное поле оказывает малое влияние.

Течение и теплообмен в горле в цилиндрической системе координат описываются уравнениями пограничного слоя сжимаемой жидкости

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (\rho v z) + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{dp}{dt} + \mu \Phi \quad (3)$$

$$\rho = \rho R_g T, \quad (4)$$

где  $u$ ,  $v$  - осевая и радиальная компонента скорости, соответственно,  $\Phi$  - диссипативная функция.

Для исследования системы используем метод возмущений



$$\begin{aligned}
 p(x, z, t) &= p_0 + \varepsilon p_1(x, z, t) + \varepsilon^2 p_2(x, z, t) + \dots, \\
 u(x, z, t) &= \varepsilon u_1(x, z, t) + \varepsilon^2 u_2(x, z, t) + \dots, \\
 v(x, z, t) &= \varepsilon v_1(x, z, t) + \varepsilon^2 v_2(x, z, t) + \dots, \\
 T(x, z, t) &= T_0(x, z) + \varepsilon T_1(x, z, t) + \dots, \\
 \rho(x, z, t) &= \rho_0(x, z) + \varepsilon \rho_1(x, z, t) + \dots,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $U_0=v_0=0$ ,  $p_0=\text{const}$ , а  $T_0(x, r)$  - осредненная температура газа в горле.

Подставляя ряды (5) в (1 – 4) и собирая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$  получим в нулевом приближении

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \lambda \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) = 0 \tag{6}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_0}{\partial z} &= 0, & z &= 0, \\
 T_0 &= T_w(x), & z &= R.
 \end{aligned}$$

Нестационарные движение и теплообмен в первом приближении описываются уравнениями

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu z \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), \tag{7}$$

$$\rho_0 c_p \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial t} \tag{8}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z \rho_0 v_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 u_1) = 0 \tag{9}$$

$$p_1 = p_c R_g T_1 + T_0 R_g p_1$$

(10)

при граничных условиях

$$\begin{aligned} u_1 = v_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad z = R, \\ u_1 = u_1(x, t), \quad z = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение (6). Для тонкого стержня радиуса  $R \ll L$  при отсутствии внутренних источников тепла, можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T_w(x)}{\partial x} \right) + \frac{q(x)}{R} = 0,$$

(11)

где  $q(x) = \lambda (\partial T_0 / \partial r)_{r=R}$  - тепловой поток через поверхность соприкосновения стенки с газом; при записи (11) учтен тот факт, что поскольку  $R \ll L$ , изменение теплового потока в дифференциалах можно заменить изменением в конечных пределах.

Пользуясь уравнением (11), несложно в выражениях (7 – 10) провести оценку отдельных членов. Рассмотрим сначала соотношение (6). Выбирая  $U_\infty$  в качестве масштаба  $U_1$  и имея в виду, что масштабы  $r$  и  $x$  равны соответственно  $R$  и  $L$ , легко получить при  $R/L \ll 1$

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu z \frac{\partial u_1}{\partial z} \right).$$

(12)

В уравнении (9) порядок члена, содержащего  $v_1$ , определяется порядком величины двух остальных. Масштаб изменения  $p_1$  определяется (по крайней мере, в ядре течения) масштабом  $p_1$ . Тогда  $v_1 \sim \omega U_\infty R / c$ . Аналогично, с учетом третьего члена,  $v_1 \sim U_\infty R / L$ , так что при  $\omega L / c \sim 1$  необходимо учитывать все члены уравнения (9). Далее из (11)  $\partial T / \partial r \sim R(T_w - T_\infty) / L^2$ . Тогда отношение третьего и второго членов в левой части (8) имеет порядок  $(R/L)^2$ , что при  $R = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $L = 34 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  составляет  $2 \cdot 10^{-5}$ . Аналогичный порядок имеет отношение первого и второго членов в правой части (8). Наконец, отношение  $\partial p_1 / \partial t$  к  $c_p \rho_0 u_1 \partial T_0 / \partial x$  имеет порядок 0.2. Таким образом, имеем

$$\rho_0 c_p \left( \frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda z \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial t}. \quad (13)$$

Рассмотрим уравнение (12). Если изменением осредненной по времени температуры потока по радиусу пренебречь, то коэффициенты теплопроводности и вязкости зависят лишь от координаты  $x$ . Введем величины соответствующие, например, резонатору, нагретому равномерно до температуры  $T_0$ , равной температуре выходного сечения горла исследуемого резонатора. Если ввести переменную

$$y = \rho_0 z / \bar{\rho}_0,$$

то уравнение (12) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \quad (14)$$

Пусть при равномерном нагревании горла резонатора пульсации скорости в ядре потока имеют вид

$$u_1 = u_\infty \cos \bar{\kappa}(L-x) \exp(i\omega t),$$

где  $\kappa = \omega/c$  - волновое число. В тех же условиях можно записать

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad (15)$$

откуда

$$p_1 = i\bar{\rho}_0 \bar{c} u_\infty \sin \bar{\kappa}(L-x) \exp(i\omega t). \quad (16)$$

Влияние неоднородности температурного поля по длине горла можно учесть, если подставить (15) в (14)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \quad (17)$$



Действительно, записывая

$$\frac{\bar{p}_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1^*}{\partial t},$$

убеждаемся, что

$$u_1^* = u_\infty (T_0 / \bar{T}_0) \cos \bar{\kappa} (L-x) \exp(i\omega t). \quad (18)$$

Следовательно, с учетом неравномерности нагрева, автоколебания в резонаторе можно представить в виде (16) и (18).

Рассмотрим влияние процесса нагревания на собственную частоту колебаний резонатора. Закон сохранения массы газа в объеме резонатора можно записать в виде

$$\int_V \frac{\partial \rho_1(0)}{\partial t} dV = - \int_S \rho_0(0) u_1(0) dS,$$

где знак «0» соответствует газу в объеме резонатора. Введем осредненные по объему пульсации плотности  $\bar{\rho}_1(0)$  и осредненные по сечению горла пульсации скорости  $\overline{u_1(0)}$ . Полагая, что  $\rho_0(0)$  не зависит от радиуса, можно записать

$$V \frac{\partial \bar{\rho}_1(0)}{\partial t} \simeq \rho_0(0) \overline{u_1(0)} \cdot S. \quad (19)$$

Решение (17) будет иметь вид

$$u_1(x) = u_\infty (T_0 / \bar{T}_0) \cos \bar{\kappa} (L-x) \left[ 1 - J_0(\alpha y) / J_0(\alpha y_0) \right] \cdot \exp(i\omega t), \quad (20)$$

где

$$\alpha = i\sqrt{L} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}.$$

Производя осреднение по сечению, будем иметь

$$\overline{u_1(0)} = u_\infty (T_0 / \bar{T}_0) \cos \bar{\kappa} L \left[ 1 + \frac{1+i}{R} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \frac{\bar{\rho}_0(0)}{\rho_0(0)} \frac{J_1(\alpha y_0)}{J_0(\alpha y_0)} \right]. \quad (21)$$

Пульсации плотности можно определить из (10), если известны пульсации давления  $P_1$ , и температуры  $T_1$ . Последнюю можно найти из (13), полагая в ней  $u_1=0$  (пульсации

скорости, если и проникают в объем, то лишь в небольшую область вблизи сечения  $x = 0$ ; кроме того, градиент осредненной температуры в объеме имеет небольшое значение. Полагая форму объема резонатора цилиндрической с радиусом  $R_0$  при  $Pr=1$  будем иметь

$$\rho_1(0) = \frac{1}{c^2(0)} \left[ 1 + (\alpha - 1) \frac{J_0(\alpha y)}{J_0(\alpha y_0)} \right] \rho_1(0),$$

где  $C(0)$  – скорость звука в объеме резонатора. Проведя осреднение и полагая  $v_\infty = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\overline{T}_0 = 420^\circ \text{ K}$ ,  $R_0 = 0,01 \text{ м}$ ,  $\omega = 670 \text{ с}^{-1}$ , легко убедиться, что с точностью 2,5% можно принять, что  $\rho_1(0)$  от  $r$  не зависит. Тогда из (19) получим

$$\bar{\kappa} L \cdot \text{tg } \bar{\kappa} L = \frac{SL}{V} \cdot \frac{T_0}{\overline{T}_0} \left[ 1 + (1+i) \sqrt{\frac{2\bar{y}}{\omega}} \cdot \frac{T_0}{R \overline{T}_0} \cdot \frac{J_1(\alpha y_0)}{J_0(\alpha y_0)} \right]. \quad (22)$$

Следует отметить, что правая часть выражения (22) – величина комплексная. Это является следствием того обстоятельства, что фаза пульсаций скорости меняется в зависимости от  $r$ . Строго говоря, вместо условия (19) следовало бы пользоваться другим, учитывающим пространственное распределение физических величин. Выражение (22) следует, по-видимому, понимать в смысле "модуль", т.е.

$$\bar{\kappa} L \cdot \text{tg } \bar{\kappa} L = \frac{SL}{V} \cdot \frac{T_0}{\overline{T}_0} \sqrt{(1+\phi_1)^2 + \phi_2^2}, \quad (23)$$

где

$$\phi_1(z^*) = \frac{2}{z^*} \cdot \frac{\text{ber}_0 z^* \cdot \text{ber}'_0 z^* - \text{bez}_0 z^* \cdot \text{bei}'_0 z^*}{\text{bez}_0^2 z^* + \text{bei}_0^2 z^*}, \quad (24)$$

$$\phi_2(z^*) = \frac{2}{z^*} \cdot \frac{\text{bez}_0 z^* \cdot \text{ber}'_0 z^* + \text{bei}_0 z^* \cdot \text{bei}'_0 z^*}{\text{bez}_0^2 z^* + \text{bei}_0^2 z^*}, \quad z^* = \sqrt{\frac{\omega}{\bar{y}}} \frac{\rho_0(\omega) R}{\overline{T}_0}. \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что при  $T_0 = \overline{T_0}$  и  $R \sqrt{\omega/2\overline{\nu}} \rightarrow \infty$  выражение (24) принимает вид (0).

Если  $R \sqrt{\omega/2\overline{\nu}} \gg 1$  и осуществляется разогрев, то следует ожидать повышения частоты колебаний. При умеренных  $Z^*$  этот рост тормозится: для  $2 < Z^* < 3$  выражение под корнем уменьшается с ростом  $T_0/\overline{T_0}$ . В случае высокочастотных колебаний  $Z^* \rightarrow \infty$  и  $\frac{J_1(\alpha Y_0)}{J_0(\alpha Y_0)} \rightarrow -i$ , так что имеем

$$\overline{\kappa_m} L \cdot \operatorname{tg} \overline{\kappa_m} L = \frac{SL}{V} \cdot \frac{T_0}{\overline{T_0}}, \quad (26)$$

где  $\overline{\kappa_m} = \omega_m/\overline{c}$ , а  $\omega_m$  следует рассматривать как частоту максимально возможную при перегреве  $T_0/\overline{T_0}$ .

Рассмотрим уравнение теплообмена (13). Введя замену  $T_1 = \theta(Y) \exp(i\omega t)$  с учетом (17), получим

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{i\omega}{\alpha} \theta = - \frac{i\omega \overline{\rho_0}^2 \overline{c}}{\overline{\lambda} \rho_0} \cdot U_\infty \sin \overline{\kappa}(L-x) + \\ + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_0}{\overline{T_0}} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial x} U_\infty \cos \overline{\kappa}(L-x) \left[ 1 - \frac{J_0(\alpha Y)}{J_0(\alpha Y)} \right]. \quad (27)$$

В силу того, что коэффициент теплопроводности металлической стенки значительно выше теплопроводности воздуха, на стенке должно выполняться условие  $\theta = 0$ . Граничное условие на оси можно получить, если учесть что при  $r \rightarrow 0$  влияние теплопроводности исчезает, т.е.  $\partial \theta / \partial Y = 0$ , следовательно, имеем

$$\theta = \frac{\overline{\rho_0} \overline{c}}{\rho_0 c_p} U_\infty \sin \overline{\kappa}(L-x) + \frac{i}{\omega} \frac{T_0}{\overline{T_0}} \frac{\partial T_0}{\partial x} U_\infty \cos \overline{\kappa}(L-x), \quad Y \rightarrow 0. \quad (28)$$

Условие самовозбуждения автоколебаний в этом случае записывается в виде

$$A_\Sigma^T \geq P_1^T + P_2^T, \quad (29)$$

Где  $P_1^T$  – осредненные за период колебаний нормированные потери на излучение с открытого конца горла,  $P_2^T$  – потери на трение о стенки горла.

Потери на излучение с открытого конца горла вычисляются как обычно.

По-видимому, единственной экспериментальной работой, более или менее полно освещающей обсуждаемое явление, следует признать [1], где указывается, что перепад температур между стенками объема резонатора и окружающей средой на границе возбуждения составлял  $520 - 560^{\circ}\text{C}$ . При этом исследованные резонаторы имели длину горла  $0,34\text{ м}$ ,  $0,44\text{ м}$ ,  $0,52\text{ м}$ , соответственно, а возбуждались автоколебания с частотой  $108\text{ гц}$ ,  $92\text{ гц}$ ,  $87\text{ гц}$ . Численный расчет частоты автоколебаний по выражению (23) для  $\overline{T_0} = 313^{\circ}\text{K}$ ,  $T_d(0) = 833^{\circ}\text{K}$  дает значения  $117\text{гц}$ ,  $100\text{гц}$ ,  $87\text{гц}$ . Совпадение результатов следует, по-видимому, признать удовлетворительным. Обстоятельство, что формула (23) дает несколько завышенные значения частот (в пределах  $8\%$ ), можно объяснить тем, что в расчетах  $T_d(0)$  принималась равной температуре стенки объема резонатора. Между тем следует ожидать, что средняя температура газа в объеме резонатора будет значительно ниже температуры стенок объема.

Численный анализ выражения (23) при распределении осредненной температуры стенки показал, что температура  $T_2$ , соответствующая границе области возбуждения, носит экстремальный характер, при слишком коротком или слишком длинном горле граничная температура неограниченно возрастает. Нетрудно видеть, что расчетные и экспериментальные данные согласуются с высокой степенью точности, (в пределах  $5\%$ ).

### Вопросы:

1. Что представляет собой резонатор Гельмгольца.
2. Произвести расчет резонатора Гельмгольца.

## Тема 6. Эффект Зондхаусса

### Лекция 6

**Аннотация:** В данной главе рассматривается общая методика теоретического исследования процесса возбуждения термических автоколебаний, дается теория возбуждения эффекта Зондхаусса проводится сопоставление теории и эксперимента.

**Ключевые слова:** канал, автоколебания, пульсации скорости, пульсации давления, температура, теплообмен.

#### Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления о предмете;
- В качестве самостоятельной работы нужно подготовиться к устному опросу;
- Для проверки усвоения темы имеются вопросы к каждой лекции.

#### Литература

Теория термических автоколебаний. Р.Г. Галиуллин, И.П. Ревва, Г.Г. Халимов / Издательство казанского университета, 1982. С. 67-85.

#### Глоссарий

**Эффекта Зондхаусса** - возбуждение звука в трубе, к которой снаружи или изнутри подводится тепло при отсутствии потока через полость трубы.

#### Вопросы для изучения:

1. Особенности эффекта Зондхаусса.
2. Произвести расчет акустической энергии.
3. Произвести расчет эффекта Зондхаусса.

Начнем рассмотрение конкретных моделей Термических автоколебаний с эффекта Зондхаусса. Это явление получило название по имени открывшего его исследователя и состоит в возбуждении звука в трубе, к которой снаружи или изнутри подводится тепло при отсутствии потока через полость трубы.



Рассмотрим плоский канал с квадратным сечением. Длина, канала  $L$ , сторона квадрата равна  $d$ . Один конец канала закрыт, другой открыт, и газ в канале сообщается с окружаю - щей средой (рис.1а).

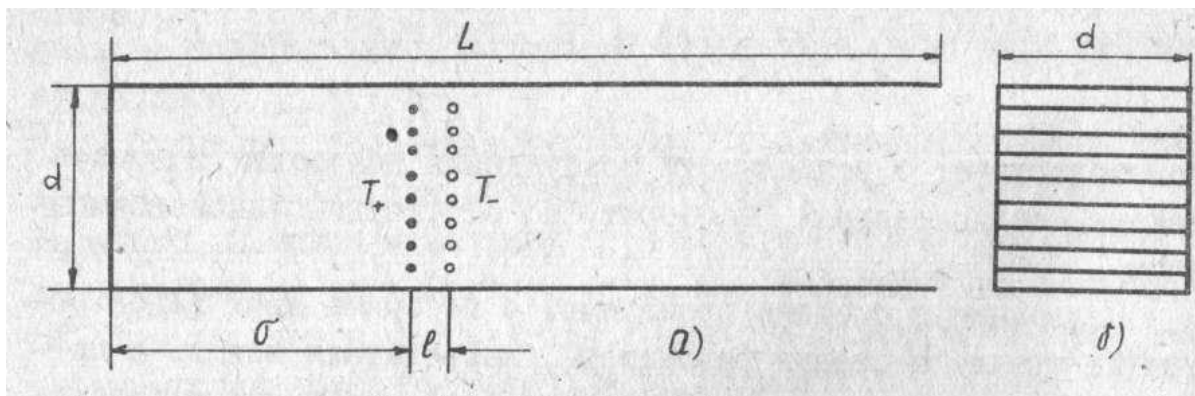


Рис.7. Схематическая модель установки Зондхауса (а) и вид нагревателя (б).

Внутри канала на расстоянии  $\sigma$  от закрытого конца расположен нагреватель, на расстоянии  $\ell \ll \sigma$  от нагревателя находится охладитель. Они имеют вид решеток, состоящих из равного числа  $N$  цилиндрических стержней одинакового радиуса  $a$  (рис. 16). Нагреватель имеет постоянную температуру  $T_+$ , температура охладителя  $T_-$ . Они расположены таким образом, что стержни параллельны.

Направим ось  $X$  вдоль канала так, чтобы закрытый конец находился в т.  $x=0$ , оси других координат совместим с плоскостями стенок канала (рис.1а).

Допустим, что в канале возникли малые акустические колебания, причем пульсации скорости в ядре потока

$$u_p = u_\infty \sin \kappa x \cdot e^{i\omega t}, \quad (3.3)$$

пульсации давления

$$p_1 = i\rho c_0 u_\infty \cos kx e^{i\omega t}, \quad (3.4)$$

Где  $u_\infty$  - амплитуда пульсаций скорости в ядре течения,  $\omega$  - циклическая частота,  $c_0$  - скорость звука,  $k = \omega / c_0$  волновое число,  $\rho$  - плотность газа. Для простоты принято, что установившиеся колебания являются гармоническими, а их частота соответствует основной гармонике трубы. Положим также, что поведение газа в канале описывается уравнениями для несжимаемой жидкости, хотя это принципиального значения не имеет, так как, во-первых, уравнение неразрывности с учетом сжимаемости решено Вестервельтом, а, во-вторых, пренебрежение членом  $\partial\rho/\partial t$  равносильно требованию  $\omega\ell/c_0 \ll 1$  что легко выполняется в нашем случае, когда расстояние между нагревателем и охладителем  $\ell$  мало по сравнению с длиной волны.

Акустические колебания среды вызывают колебательные процессы в зоне теплоподвода. Чтобы получить выражение для пульсирующего теплового потока, необходимо решить задачу о теплообмене системы цилиндров, помещенных в звуковое поле. То есть решетки нагревателя и охладителя представим как систему из  $N$  самостоятельных нагревателей и  $N$  охладителей, имеющих форму цилиндров и расположенных как показано на рис. 2. Обозначим "+" параметры нагревателя, "-" обозначим параметры охладителя. Найдем температурное поле, создаваемое этой системой при наложении звуковых колебаний.

Рассмотрим сначала теплообмен одного нагревателя, на - пример 1 + . Цилиндрическая форма нагревателя позволяет решать задачу на плоскости, так что оси новых координат  $x^1$  и  $y^1$  расположим как показано на рис. 8.

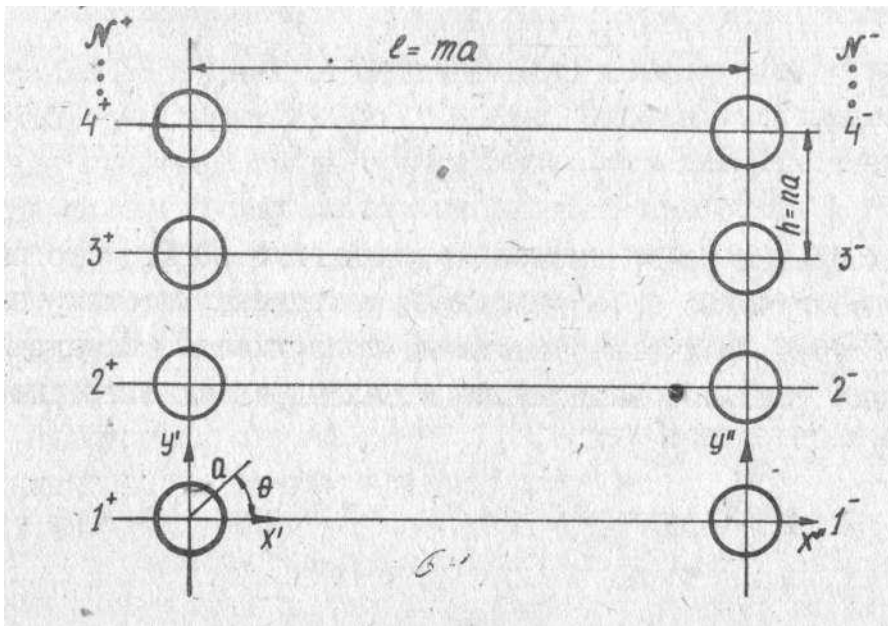


Рис.8. Схема нагревательной системы.

Введем функцию тока  $\psi$ , так, чтобы

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y'}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x'},$$

Где  $u_1, v_1$ - компоненты пульсаций скорости вдоль координат  $x^1, y^1$  соответственно, и полярные координаты  $\tau, \theta$

При переходе к безразмерным переменным, уравнение сохранения вихрей и энергии для несжимаемой жидкости без учета естественной конвекции и вязкой диссипации для случая малых амплитуд можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(v^2\psi)}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial(\psi, v^2\psi)}{\partial(\theta, y)} &= \frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(y, \theta)} &= \frac{1}{Pr H^2} \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим уравнение, оно инвариантно относительно преобразований координат, поэтому начало системы отсчета можно перенести на поверхность цилиндра. Тогда граничные условия, записанные в цилиндрических координатах примут вид

$$\begin{aligned} \psi &= (1+y) \sin \theta e^{it} & , y \rightarrow \infty, \\ \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 & , y = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Данное уравнение является не линейным, вследствие чего до настоящего времени не найдено его точных решений. Однако в тех случаях, когда параметр  $\varepsilon$  является малым, можно использовать метод возмущений и отыскать решение с наперед заданной точностью.

Решение в этом случае отыскивается в виде ряда

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots, \quad (3.7a)$$

Где  $\varepsilon \ll 1$ . Собирая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi_0) &= \frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi_0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi_1) - \frac{\partial (\psi_0, \nabla^2 \psi_0)}{\partial (\theta, y)} &= \frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi_1, \\ &\dots \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi_k) - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\partial (\psi_l, \nabla^2 \psi_{k-l-1})}{\partial (\theta, y)} &= \frac{1}{H^2} \nabla^4 \psi_k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) являются линейными, поэтому не представляет особого труда получить их решения. Однако получающиеся при этом решения являются столь громоздкими, что для извлечения сколь-нибудь полезной информации необходимо прибегать к помощи ЭВМ[8].

С другой стороны, можно указать некоторые предельные случаи, при которых решения уравнений (3.8) имеют довольно простое аналитическое представление, обладая при этом наперед заданной степенью точности описания процесса.

Рассмотрим случай Н» I Тогда, пренебрегая в первом из уравнений (3.8) вязким членом, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi_{00}) = 0, \quad .$$

(3.9)

Или, исходя из вида граничного условия (3.7) при  $y \rightarrow \infty$

$$\nabla^2 \psi_{00} = 0.$$

(3.9a)

Решение (3.9a) имеет вид

$$\psi_{00} = \left[ C_1(1+y) + \frac{C_2}{1+y} \right] \cdot \sin \theta e^{it}.$$

(3.10)

Постоянную интегрирования  $C_1 = I$  можно определить из граничного условия (3.7), устремив  $y \rightarrow \infty$ . Однако решение не удовлетворяет условиям прилипания. Этого и следовало ожидать, поскольку в уравнении (3.9) отброшен вязкий член. Следовательно, вблизи поверхности цилиндра должна существовать область, которой вязкость играет активную роль. Нетрудно показать, что размер этой области порядка  $O(H^{-1})$ . Тогда, введя внутренние переменные

$$m = \frac{\psi}{U_\infty \delta}, \quad \eta = \frac{z-a}{\delta}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{t} = \omega t,$$

(3.11)

И опуская черту над буквами, первое из уравнений (3.5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial (\nabla^2 m(\eta, \theta, t, H))}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial (m(\eta, \theta, t, H), \nabla^2 m(\eta, \theta, t, H))}{\partial (\theta, \eta)} = \nabla^4 m(\eta, \theta, t, H).$$

(3.12)

Используя метод возмущений

$$m = m_0 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \dots,$$

(3.13)

Где функция  $m_k$  удовлетворяют уравнениям

(3.14a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\nabla^2 m_0(\eta, \theta, t, H)]}{\partial t} &= \nabla^4 m_0(\eta, \theta, t, H), \\ \frac{\partial [\nabla^2 m_1(\eta, \theta, t, H)]}{\partial t} - \frac{\partial [m_0(\eta, \theta, t, H), \nabla^2 m_0(\eta, \theta, t, H)]}{\partial (\theta, \eta)} &= \nabla^4 m_1(\eta, \theta, t, H). \end{aligned}$$

(3.14б)

Пренебрегая в уравнении (3.14a) всеми членами, содержащими параметр  $H$ , получим

$$\frac{\partial^3 m_{00}}{\partial t \partial \eta^2} - \frac{\partial^4 m_{00}}{\partial \eta^4} = 0, \quad (3.15)$$

решение которого имеет вид

$$m_{00} = [C_3 e^{(1+i)\eta} + C_4 e^{-(1+i)\eta} + C_5 \eta + C_6] f(\theta) e^{it}, \quad (3.16)$$

Или, после применения условий прилипания

$$m_{00} = C_4 [e^{-(1+i)\eta} + (1+i)\eta - 1] f(\theta) e^{it}. \quad (3.17)$$

В выражении учтен тот факт, что  $C_3 = 0$  так как в противном случае функция  $m_{00}$  неограниченно возрастает с ростом  $\eta$ .

Таким образом, вся область, занятая жидкостью, разбилась на две - внутреннюю, в которой силы вязкости играют активную роль, и внешнюю, где силы вязкости пренебрежимо малы. Решения (3.10) и (3.17) верны для внешней и внутренней областей, соответственно.

Можно утверждать, что существует такая промежуточная область, в которой как внутреннее, так и внешнее решения с одинаковой степенью точности описывают характер поля скорости. В связи с этим в промежуточной области функции  $\psi$  и  $m$  должны подчиняться следующему приближенному соотношению

$$H^{-1} m(\infty) \simeq \psi(0), \quad (3.18)$$

которое называется условием асимптотического сращивания внешнего и внутреннего разложений. Используя асимптотическое представление для функции  $m_{00}$  при  $\eta \rightarrow \infty$ , записанной во внешних переменных, а также разлагая функцию  $\psi_\infty$  в ряд Тейлора вблизи  $y = 0$ , выражение (3.18) можно привести к виду

$$C_4 \left[ (1+i)y - \frac{1}{H} \right] f(\theta) e^{it} = [1 + C_2 + (1-C_2)y + \dots] \sin \theta e^{it}. \quad (3.19)$$

С учетом того факта, что решения  $m_{00}$  и  $\psi_\infty$  верны с точностью до членов  $O(H^{-1})$ , а также используя условие (3.19), можно получить

$$f(\theta) = \sin \theta, \quad C_2 = -1, \quad C_4 = 1 - i.$$

Таким образом, будем иметь

$$\psi_{00} = \left[ (1+y) - \frac{1}{1+y} \right] \sin \theta e^{it} \quad (3.20)$$

Для внешней области, и

$$m_{00} = \left[ \eta + \frac{1-i}{2} (e^{-(1+i)\eta} - 1) \right] 2 \sin \theta \cdot e^{it} \quad (3.21)$$

для внутренней области. Аналогично получаются функции  $m_{01}$ ,  $m_{02}$  и т.д.

Обратимся ко второму из уравнений (3.5), описывающему пульсирующий теплообмен. Используя метод возмущений, представим решение также в виде разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$

$$T = T_0(y, \theta) + \varepsilon T_1(y, \theta, t) + \varepsilon^2 T_2(y, \theta, t) + \dots$$

Тогда получим

$$\nabla^2 T_0 = 0 \quad (3.22)$$

В нулевом приближении и

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{1+y} \frac{\partial(\psi, T_0)}{\partial(y, \theta)} = \frac{1}{\rho_2 H^2} \nabla^2 T_1 \quad (3.23)$$

В первом приближении.

Найдем стационарное поле температур, которое задается уравнением Лапласа (3.22). Представив систему нагревателей и охладителей на рис.8 как систему точечных источников и стоков тепла, решение уравнения (3.22) ищем в виде суммы логарифмических потенциалов

$$T_0 = \sum_{j=1}^N C_j^+ \ln(1/z_j^+) + \sum_{j=1}^N C_j^- \ln(1/z_j^-), \quad (3.24)$$

$$z_j^+ = \sqrt{z^2 + (j-1)^2 n^2 a^2 + 2z(j-1)na \sin \theta}, \quad (3.24a)$$

$$z_j^- = \sqrt{m^2 a^2 - 2zma \cos \theta + z^2 + (j-1)^2 n^2 a^2 + 2z(j-1)na \sin \theta}, \quad (3.24b)$$

Предположим, что коэффициенты  $C_j^+$  определяются только тепловыми свойствами нагревателей,  $C_j^-$  только тепловыми свойствами охладителей. Но все нагреватели одинаковы, тогда  $C_j^+ \equiv C^+$ , а из сходства охладителей между собой следует, что  $C_j^- \equiv C^-$

Найдем  $C^+$

$$-2\pi\lambda_+ (\partial T_0 / \partial z)_{z=z_0} = q_+^*, \quad (3.25)$$

где  $\lambda_+$  - коэффициент теплопроводности воздуха около нагревателя,  $q_+^*$  - тепловой поток, приведенный к единице длины цилиндра.



Если устремить  $\tau_0$  к нулю, то  $q_+^*$  можно определить как тепловую мощность источника, которую найдем по формуле Ньютона

$$q_+^* = \left( \frac{T_+}{\Delta T} - \frac{T_-}{\Delta T} \right) \alpha_+ \equiv \alpha_+,$$

где  $\mathcal{L}_+$  - коэффициент теплоотдачи, приведенный к единице длины цилиндра.

Подставив выражение (3.24) в формулу (3.25), при  $\tau \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned} 2\pi \mathcal{L}_+^* \lambda_+ &= \alpha_+ \\ \mathcal{L}_+^* &= \alpha_+ / 2\pi \lambda_+ . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Учитывая, что радиус цилиндра мал, воспользуемся формулой Кинга [26]

$$\alpha_+ = \lambda_+ \left( 1 + \sqrt{\frac{4\pi\rho c_v a v}{\lambda_+}} \right),$$

где  $\rho$  - плотность воздуха,  $c_v$  - теплоемкость при постоянном объеме, и  $v$  - скорость потока. Пренебрегая влиянием пульсаций скорости на коэффициент теплоотдачи и учитывая, что стационарная скорость равна нулю, получим

$$\mathcal{L}_+^* = 1/2\pi . \quad (3.27a)$$

Аналогично для  $\mathcal{L}_-^*$  имеем

$$\mathcal{L}_-^* = -1/2\pi . \quad (3.27б)$$

Следовательно, выражение (3.24) с учетом (3.27а,б) можно переписать в виде

$$T_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \ell_n \frac{z_j^*}{z_j^*}, \quad (3.28)$$

где  $\tau_j^+$  и  $\tau_j^-$  определяются выражениями (3.24а,б).

Выражение (3.28) является решением уравнения (3.22) и определяет стационарное поле температур.

Рассмотрим уравнение (3.23), которое определяет пульсации температуры

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{1+y} \left( \frac{\partial T_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial T_0}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho c H^2} \nabla^2 T_1. \quad (3.29)$$

Вводя внутренние переменные

$$m = (\psi \alpha) \delta^{-1}, \quad \eta = (y \alpha) \delta^{-1} = (z - \alpha) \delta^{-1},$$

и учитывая, что  $H \gg I$ , уравнение (3.29) запишем в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \left(1 - \frac{\eta \sqrt{2}}{H}\right) \left( \frac{\partial T_0}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial m}{\partial \theta} - \frac{\partial T_0}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial m}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2}. \quad (3.30)$$

Будем считать, что влиянием соседних цилиндров на течение можно пренебречь. Тогда при  $\rho \tau \gg I$  можно воспользоваться решением (3.21). Корректность этого шага будет доказана дальше.

Подставим выражения  $T_0$  из (3.28) и  $m_{00}$  из (3.21) в уравнение (3.30). Решение полученного уравнения ищем в виде разложения по степеням  $1/H$

$$T_1 = \left( T_{10} + \frac{1}{H} T_{11} + \frac{1}{H^2} T_{12} + \dots \right) e^{it}.$$

Ограничившись первым приближением  $T_{10}$ , оставим в полученном уравнении только члены порядка  $I$ . Для простоты взяв  $\rho \tau = 1$ , имеем

$$\frac{\partial^2 T_{10}}{\partial \eta^2} - 2i T_{10} = 2 \Phi(\theta) \left[ e^{-(1+i)\eta} - 1 \right], \quad (3.31)$$

Где

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\pi} \sin \kappa \sigma \sin \theta \sum_{j=1}^N \left( \frac{m \sin \theta + n(j-1) \cos \theta}{m^2 + (j-1)^2 n^2 + 1 - 2m \cos \theta + 2n(j-1) \sin \theta} - \frac{n(j-1) \cos \theta}{n^2(j-1)^2 + 1 + 2n(j-1) \sin \theta} \right). \quad (3.32)$$

Решение уравнения (3,31) с учетом конечности  $T_{10}$  при  $y \rightarrow \infty$  и  $T_{10}=0$  при  $\eta = 0$  имеет вид

$$T_{10} = \left\{ \left[ \frac{1}{2} (i-1) \eta + i \right] e^{-(i+i) \eta} - i \right\} \Phi(\theta).$$

Действительная часть выражения для пульсаций теплового потока  $q_1^+$  от нагревателя  $I^+$  в размерных переменных имеет вид

$$\operatorname{Re} q_1^+ = \operatorname{Re} \left( -\lambda_+ \frac{\varepsilon \Delta T}{\delta_+} \frac{\partial T_{10}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} e^{i \omega t} \right) = -\frac{1}{2} \varepsilon \Delta T \frac{\lambda}{\delta} \Phi(\theta) (\sin \omega t + \cos \omega t).$$

Величины  $\lambda$  и  $\delta$  являются функциями температуры, но их отношение изменяется не более чем на 13% в диапазоне температур от  $0^\circ\text{C}$  до  $1000^\circ\text{C}$ . Поэтому для простоты дальнейших выкладок пренебрежем зависимостью  $\lambda/\delta$  от температуры, хотя учет этой зависимости не представляет особого труда. Окончательные результаты, представленные на графиках, рассчитаны с учетом этой зависимости.

Чтобы найти пульсации общего теплового потока  $q_{\Sigma 1}^+$  от нагревателя  $I^+$ , необходимо проинтегрировать (3.33) по  $\theta$

$$q_{\Sigma 1}^+ = 2a \int_0^\pi q_1^+ d\theta.$$

Нагревательная система состоит из  $N$  нагревателей, поэтому вместе они дают

$$Q^+ = \sum_{i'=1}^N q_{\Sigma i'}^+, \quad i' = 1, 2, \dots, N.$$

Для расчета пульсаций теплоподвода от всех нагревателей сначала поменяем местами знаки суммирования по  $i'$  и интегрирования по  $\theta$ . Найдем пульсации потока от остальных нагревателей так же, как пульсации потока от нагревателя  $I^+$ . Для этого переносим каждый раз начало координат в центр,

того нагревателя, пульсации теплового потока которого вычисляем, и решаем для него уравнение энергии. Сложив результаты, получим

$$Q^+ = -\alpha \varepsilon \Delta T \frac{\lambda}{\delta} (\sin \omega t + \cos \omega t) \int_0^\pi \Phi_\Sigma(\theta) d\theta,$$

Где

$$\Phi_\Sigma(\theta) = \frac{1}{\pi} \sin \kappa \sigma \sin \theta \sum_{j=1}^N \xi [N - (j-1)] \left\{ \frac{m \sin \theta + n(j-1) \cos \theta}{m^2 + n^2(j-1)^2 + 1 - 2[m \cos \theta + n(j-1) \sin \theta]} + \right. \quad (3.34)$$

Выполнив интегрирование, получим с точностью до 5 %

$$+ \frac{m \sin \theta - n(j-1) \cos \theta}{m^2 + n^2(j-1)^2 + 1 - 2[m \cos \theta + n(j-1) \sin \theta]} + \frac{n(j-1) \cos \theta}{n^2(j-1)^2 + 1 + 2n(j-1) \sin \theta} - \left. \frac{n(j-1) \cos \theta}{n^2(j-1)^2 + 1 - 2n(j-1) \sin \theta} \right\}, \quad (3.35)$$

$$Q^+ = -\alpha \varepsilon \Delta T \frac{\lambda}{\delta} \Psi_0 m \sin \kappa \sigma (\sin \omega t + \cos \omega t),$$

$$\Psi_0 = \sum_{j=1}^N \xi [N - (j-1)] \left\{ \frac{1}{m^2 + (j-1)^2 n^2 + 1} + \frac{m^2 + (j-1)^2 n^2}{[m^2 + (j-1)^2 n^2 + 1]^3} \right\},$$

$$\xi = \begin{cases} 1/2, & j=1 \\ 1, & j \neq 1 \end{cases}.$$

(3.36)

Вычислим пульсации теплового потока от охладителя I<sup>-</sup>. Для этого перенесем начало координат в его центр, тогда новые координаты расположатся, как показано на рис.8. Вычисления производятся так же, как и для нагревателя I<sup>+</sup>, при этом

$$z_j^+ = \sqrt{m^2 a^2 + 2 m a z \cos \theta + z^2 + (j-1)^2 n^2 a^2 + 2 a z n(j-1) \sin \theta},$$

$$z_j^- = \sqrt{z^2 + (j-1)^2 n^2 a^2 + 2 z n a(j-1) \sin \theta}.$$

Далее, повторив ход выкладок, получим, что все охладители дают пульсации теплоподвода

$$\dot{Q} = -\alpha \varepsilon \Delta T \frac{\lambda}{\delta} \Psi_0 m \sin \kappa(\kappa + \ell) (\sin \omega t + \cos \omega t), \quad (3.37)$$

где  $\Psi_0$  определяется выражением (3.36). Выражение (3.37) в точности совпадает с соотношением (3.35), т.е. нагреватели и охладители вносят одинаковый вклад в пульсирующий тепловой поток. Тогда пульсирующий тепловой поток от системы и будет равен

$$\dot{Q} = -\frac{2U_{\infty} \Psi_0 \lambda \Delta T m d}{\omega \delta} \sin \kappa \cos (\sin \omega t + \cos \omega t). \quad (3.38)$$

Для расчета акустической энергии, генерируемой зоной теплоподвода, преобразуем выражения (3.11 - 3.15) применительно к теплообменнику, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, точнее для случая  $\ell \ll \delta$ . Пусть  $M_0 = 0$ , тогда выражения (I. 74a, 6) примут вид

$$d\bar{u}_1 = \frac{\alpha-1}{\rho_0 c_0^3} m q_1 dx, \quad d\bar{p}_1 = 0.$$

Следовательно, среднее за период колебаний количество акустической энергии, генерируемой одиночным стержнем и приходящейся на единицу площади сечения канала, определится выражением

$$d\bar{A}_{\Sigma} = \langle \bar{p}_1 d\bar{u}_1 \rangle = \frac{\alpha-1}{\rho_0 c_0^3} \cdot \frac{1}{d} \langle \bar{p}_1 \bar{q}_1 \rangle d\ell, \quad (3.39)$$

где  $d\ell = a d\theta$  - элемент дуги окружности цилиндрического нагревателя. Произведи интегрирование и учитывая тепловой поток от всех нагревателей и охладителей для среднего за период колебаний количества акустической энергии, генерируемой зоной теплоподвода, можно получить

$$\bar{A}_{\Sigma}^T = \frac{\alpha-1}{\rho_0 c_0^3} \langle \bar{p}_1 Q \rangle, \quad (3.40)$$

где  $Q$  определяется соотношением (3.38). Имея в виду, что безразмерные пульсации давления, в соответствии с выражением (3.4), определяются как

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -\frac{U_\infty}{c_0} \cos \kappa x \sin \omega t, \\ A_\Sigma^T &= \frac{(\kappa-1) d \lambda m U_\infty^2 \psi_0 \Delta T}{2 \omega \rho_0 c_0^3 \delta} \sin 2 \kappa x. \end{aligned} \quad (3.41)$$

**Расчет потерь акустической энергии.** Потери энергии складываются из энергии излучения с открытого конца канала  $p_1^T$ , работы на преодоление сил трения о стенки канала  $p_{21}^T$ , сил трения на стержнях нагревательной системы  $p_{22}^T$

Потери на излучение с открытого конца канала можно определить по формуле

$$p_1^T = \frac{1}{\rho_0 c_0^3} \langle p_{1L} u_{1L} \rangle \cdot S, \quad (3.42)$$

где  $S = d^2$  – площадь сечения канала,  $p_{1L}$  – пульсации давления на открытом конце,  $u_{1L}$  – пульсации скорости в ядре потока на открытом конце, аугловые скобки означают осреднение во времени.

Из (3.3) при  $x=L$  получим

$$u_{1L} = U_\infty \cos \omega t.$$

По модели "в 1/4 волны" распределение давления вдоль трубы задается как  $\cos \kappa x$ , т.е. на открытом конце пульсации давления считаются равными нулю. В действительности, однако, из открытого конца энергия излучается всегда: импеданс открытого конца отличен от нуля. Наличие активной части импеданса приведет к тому, что распределение давления будет иметь вид (2.47). Однако при небольших значениях амплитуды давления  $\mathcal{L} \ll 1$ , а активная часть импеданса  $X$  определяется соотношением Гутина (2.50). Тогда имеем

$$\rho_{11} = \chi u_{11}$$

$$\rho_{11}^T = \frac{\chi u_{\infty}^2 d^2}{2 \rho_0 c_0^3} \quad (3.43)$$

Потери на трение о стенки канала квадратного сечения можно определить, если известны потери для цилиндрической трубы. Воспользуемся понятием гидравлического диаметра  $d_{\text{г}} = 4S/P$ , где  $S$ ,  $P$  - площадь-сечения и периметр канала, соответственно [33]. Тогда, учитывая, что  $d_{\text{г}} = d$ , для круглой трубы выполняется соотношение

$$P_{21}^T = \frac{2\pi\mu}{\rho_0 c_0^3} \left\langle \int_0^R \int_0^L \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 z dz dx \right\rangle, \quad (3.44)$$

где, согласно (2.54) и (3.3)

$$u_1 = u_{\infty} \sin kx \left( 1 - \sqrt{\frac{R}{z}} e^{-(1+i)\sqrt{\omega/2\nu}(R-z)} \right) e^{i\omega t}, \quad R = \frac{d}{2},$$

легко получить

$$P_{21}^T = \frac{\pi \omega d \delta L u_{\infty}^2}{8 c_0^3} \quad (3.45)$$

Потери на трение для  $2N$  стержней длиной  $d$ , осредненные за период колебаний, можно вычислить по формуле

$$P_{22}^T = \frac{4Nd\mu u_{\infty}^2 a}{\rho_0 c_0^3 \omega \delta} \left\langle \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \left( \frac{\partial^2 m_{00}}{\partial \eta^2} \right)^2 d\eta d\theta \right\rangle,$$

где  $m_{00}$  определяется соотношением (3.21). Выполнив интегрирование, получим

$$P_{22}^T = 2\pi \omega u_{\infty}^2 d N a \delta \sin^2 k\sigma / c_0^3 \quad (3.46)$$

Подставив полученные выражения (3.41), (3.43), (3.45а,б) и (3.46) в (3.2), нетрудно получить условие возбуждения колебаний, связывающее геометрию канала, разность температур нагревателя и охладителя и свойства газа, заполняющего канал. Это условие можно записать в виде

$$\Psi_0 (\alpha-1) \lambda m \Delta T \sin 2\kappa\delta - 8\pi c_g \mu \omega \alpha N \sin^2 \kappa\delta - 0,5 \pi \mu \omega L c_g - d c_g \chi \sqrt{2\gamma \omega} > 0 \quad (3.47)$$

где  $\psi_0$  определяется по выражению (3.36),  $\chi$  - по (2,50).

Для сравнения полученного теоретического результата с экспериментом воспользуемся данными японских исследователей Катто и Такано [38] . Параметры их экспериментальной установки, схема которой тождественна рассмотренной модели, следующие сторона квадратного сечения канала  $d = 3 \cdot 10^{-2}$  м, радиус стержня  $a = 10^{-3}$  м, число стержней в решетке нагревателя  $N = 7$ , длина канала  $L$  менялась от 0,7 до 1,6 м, расстояние между нагревателем и охладителем  $\ell$  варьировалось в пределах

$5 \cdot 10^{-3} - 7 \cdot 10^{-3}$  м, отношение  $\delta/L$  также изменялось

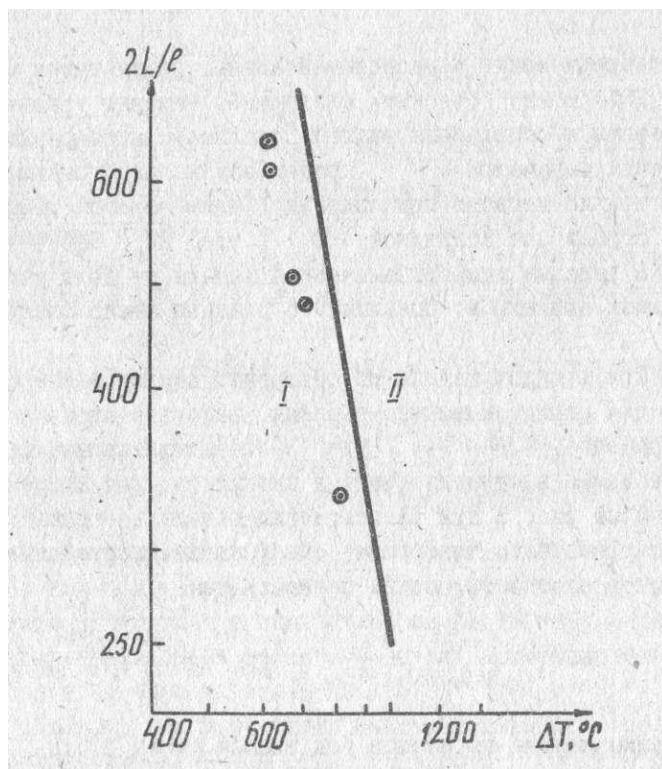




Рис. 9. Область возбуждения колебаний (II) в координатах  $\Delta T - 2L/\ell$  для  $\ell = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$   $\delta/L = 0,5$ :  $0,7 \text{ м} \leq L \leq 1,6 \text{ м}$ ; сплошная линия - теория, точки - эксперимент (38).

На рис. 9 построены на логарифмической плоскости  $\Delta T - 2L/\ell$  области возбуждения колебаний, полученные теоретически и экспериментально для значений  $\ell = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$   $\delta/L = 0,5$ . Длина канала  $L$  изменялась в максимальных пределах  $0,7 - 1,6 \text{ м}$ . Отметим, что результаты, представленные на рис.9, желательнее было бы построить в безразмерных координатах. Но сделать это - без внесения определенного домысла невозможно, так как в работе (38) не введена безразмерная температурная координата.

Как видно из рис. 9, теория находится в хорошем качественном соответствии с экспериментом. Количественные расхождения теоретических и экспериментальных результатов (не превышающие 25%) можно объяснить следующий. Решения уравнения энергии и уравнения сохранения вихрей искались в виде разложения - по степеням параметра  $1/N$ , причем поиск был ограничен нахождением только первого приближения. Таким образом точность теории была ограничена величиной  $1/N$ , т.е. 25 - 30%.

В решении гидродинамической задачи не было учтено влияний соседних цилиндров. Оценить это влияние можно следующим образом.

При решении задачи об обтекании изолированного цилиндра [21] для записи внешнего решения использовалось конформное отображение  $W = Z_0 + 1/Z_0$ , где  $Z_0$  - комплексная переменная. переводящая внешность круга в плоскость. Для системы, изображенной на рис. 8 при расположении начала координат на центральном нагревателе, конформное отображение, переводящее внешность кругов в плоскость, можно записать как

$$W = z_0 + \frac{1}{z_0} + \sum_{k=1}^{(M-1)/2} \left( \frac{1}{z_0 - i\eta k} + \frac{1}{z_0 + i\eta k} + \frac{1}{z_0 - m} + \frac{1}{z_0 - m - i\eta k} + \frac{1}{z_0 - m + i\eta k} \right).$$

Разложим каждый из членов под знаком суммы в ряд и отброс члены, вклад которых меньше 1%. После преобразований получим

$$W = z_0 + \left[ \frac{1}{z_0} + \Phi_1 z_0 \right]$$

где

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left[ \frac{2}{\kappa^2 n^2} + \frac{2(\kappa^2 n^2 - m^2)}{(\kappa^2 n^2 + m^2)^2} - \frac{1}{m^2} \right]$$

Тогда внешнее решение с учетом влияния соседних цилиндров имеет вид

$$\psi_{00} = \left\{ (1+y) + C_2 \left[ -\frac{1}{1+y} + \Phi_1 (1+y) \right] \right\} \sin \theta e^{lt}$$

Внутреннее решение записывается в виде

$$m_{00} = C_4 \left[ e^{-(1+l)\eta} + (1+l)\eta - 1 \right] f(\theta) e^{lt}$$

Из условия асимптотического сращения внешнего и внутреннего решений

$$(1/H) m(\infty) \simeq \psi(\theta)$$

находим константы

$$C_2 = \frac{1}{1-\Phi_1}, \quad C_4 = \frac{1-l}{1-\Phi_1}$$

Следовательно внутреннее решение, учитывающее влияние соседних цилиндров, отличается от внутреннего решения для изолированного цилиндра множителем  $1/(1-\Phi_1)$  что приводит к увеличению на 17% значений пульсаций теплоподвода.

При решении уравнения (3.30) для простоты  $\rho\tau$  был выбран, равным 1. Но для большинства газов  $\rho\tau \simeq 0,7$  Если ввести новую переменную и провести решение таким же образом, то выражение для пульсаций теплового потока содержало бы множитель  $\sqrt{\rho\tau}$ , т.е. было бы меньше на 20%.

Таким образом, два неучтенных фактора: влияние соседних цилиндров в гидродинамической задаче и выбор  $\rho\tau = 1$  - действуют на результат в противоположных направлениях и количественно почти взаимно уничтожают друг друга, не оказывая заметного воздействия на окончательный результат.

**Вопросы:**

1. Особенности эффекта Зондхаусса.
2. Произвести расчет акустической энергии.
3. Произвести расчет эффекта Зондхаусса.

## Тема 7. Термоакустические колебания газа в канале с переменным тепловым сопротивлением

### Лекция 7

**Аннотация:** В данном разделе рассматривается система с теплоподводом, в которой образуются термические колебания. Так же рассматривается, какими еще источниками энергии обладает данная система. За основу была взята гипотеза Рэлея. Так же рассматривается и рассчитывается поток акустической энергии.

**Ключевые слова:** источник энергии, температура, автоколебательная система, вибрационное горение.

#### Методические рекомендации по изучению темы

- Тема содержит лекционную часть, где даются общие представления о предмете;
- В качестве самостоятельной работы нужно подготовиться к устному опросу;
- Для проверки усвоения темы имеются вопросы к каждой лекции.

#### Литература

Вибрационное горение. Б.В. Раушенбах / Издательство казанского университета, 1982. С. 106-118.

#### Глоссарий

**Автоколебания** — незатухающие колебания в диссипативной динамической системе с нелинейной обратной связью, поддерживающиеся за счёт энергии постоянного, то есть непериодического внешнего воздействия.

**Вибрационное горение** — вид неустойчивого горения, характеризующийся автоколебаниями газа в камере сгорания.

**Граничные условия** — дополнение к основному условию, задающее его поведение на границе рассматриваемой области.

**Поток звуковой энергии, акустическая мощность** — величина, равная отношению звуковой энергии  $dW$ , переносимой упругой средой через заданную поверхность, к интервалу времени  $dt$ , за который эта энергия переносится.

### **Вопросы для изучения:**

1. Что подразумевают под двумя источниками энергии, когда говорят про термические возбуждения звука.
2. Гипотеза Рэля.
3. Рассчитать поток акустической энергии.

#### **1. Два источника энергии при термическом возбуждении звука.**

Во всякой автоколебательной системе можно выделить собственно колебательную систему (в рассматриваемом случае этой системой является газ, находящийся в трубе), источник энергии и некоторый механизм, подводящий энергию к колебательной системе.

В предыдущей главе были выяснены наиболее существенные свойства колебательной системы. Вопрос о механизме, подводящем энергию к колебательной системе, будет частично освещен в настоящей главе, но более полно он будет рассмотрен в последующих главах. Главным содержанием настоящей главы является выявление источников энергии, поддерживающих продольные акустические автоколебания газа в трубе при горении, и анализ процессов, позволяющих периодически пополнять убыль акустической энергии из колебательной системы, связанную с неизбежными во всяком реальном явлении потерями.

С точки зрения физики процесса выявления источника энергии, питающего колебательную систему, является одним из основных. К сожалению, этому вопросу, применительно к возбуждению акустических колебаний тепло- подводом, уделялось незаслуженно мало внимания, что привело к ряду ошибочных высказываний в литературе.

По-видимому, первым исследователем, поставившим такой вопрос (правда, в неявной форме), был Рэлей. В связи с описанием опытов Рийке, Босша, Рисса и других исследователей, он говорил о поддержании колебаний теплотой следующее:

«Если теплота периодически сообщается массе воздуха, колеблющейся, например, в цилиндре с поршнем, и отнимается от нее, то получаемый эффект зависит от фазы колебания, при которой происходит передача тепла. Если теплота сообщается воздуху в момент наибольшего сжатия или отнимается от него в момент наибольшего разрежения, то это усиливает колебание. Напротив, если теплота сообщается в момент наибольшего разрежения, то колебание этим ослабляется».

В этом высказывании Рэлей говорит о возможности возбуждения акустических колебаний за счет энергии теплоподвода. Описанный им процесс является широко известным из термодинамики способом получения механической энергии за счет подводимого тепла путем совершения рабочим телом некоторого термодинамического цикла. Подобные процессы лежат в основе всех поршневых двигателей внутреннего сгорания. Совершенно очевидно, что тепло может перейти в акустическую энергию лишь таким путем, поскольку акустическая энергия есть разновидность механической, а не тепловой энергии. Рэлей подчеркивает это, говоря несколько выше: «Почти во всех случаях, где телу сообщают тепло, происходит расширение, и его можно заставить совершать механическую работу».

Здесь хотелось бы подчеркнуть, что в приведенной выше подробной цитате определенным образом говорится э возбуждении акустических колебаний в неподвижном газе (под неподвижным понимается газ, не имеющий никакого другого движения кроме связанного с акустическими колебаниями). Это видно хотя бы из того, что речь идет о газе, заключенном в цилиндре с поршнем. Переходя к несколько более подробному объяснению опытов Рийке, Рэлей проводит ту же идею и для газа, имеющего некоторую среднюю скорость движения по трубе. Давая чисто качественное описание явления, Рэлей подчеркивает, что переменная передача тепла от нагретой сетки к газу связана с движением среды, которое складывается из равномерного и наложенного на него колебательного, «между тем как эффект передачи зависит от изменения давления».

Таким образом, Рэлей считал источником энергии теплоподвод, который, имея колебательную составляющую, должным образом сдвинутую по фазе относительно колебания давления, позволяет осуществляться термодинамическому циклу, дающему механическую работу. Полученная механическая энергия, поступая в колебательную систему в том же ритме, в каком осуществляется термодинамический цикл, поддерживает акустические колебания.

Приведенный ход мыслей составляет содержание так называемой гипотезы Рэрея, которая нередко кладется в основу теоретических исследований, посвященных взаимодействию теплоподвода (в частности, горения) и акустических колебаний. В последнее время Путнэм и Деннис сделали попытку доказать эту гипотезу и придать ей математическую форму. После этого стали говорить не о гипотезе, а о критерии Рэрея, который обычно формулируют так: если между колебательной составляющей теплоподвода и колебательной составляющей давления фазовый сдвиг по абсолютному значению менее  $\frac{\pi}{2}$ , в системе возбуждаются акустические колебания; если этот сдвиг заключен между  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ , то акустические колебания гасятся.

Возникает естественный вопрос: исчерпывает ли схема поддержания акустических колебаний теплоподводом, предложенная Рэлеем, все возможные случаи? Иначе это можно сформулировать так: является ли теплоподвод единственным источником энергии, за счет которого могут поддерживаться акустические колебания в системе?

Чтобы ответить на этот вопрос, следует выявить, какими источниками энергии, кроме теплоподвода, располагает колебательная система. Поскольку рассматриваемая система имеет отличную от нуля среднюю скорость течения, то прежде всего следует выяснить, не может ли кинетическая энергия течения служить тем резервуаром, из которого колебательная система будет черпать энергию для поддержания колебаний.

Пусть в некотором сечении газового потока помещено сопротивление. Тогда, если это сопротивление будет переменным, принципиально возможно возбуждение колебаний. Действительно, если в области расположения сопротивления происходят колебания скорости, и если в момент нарастания скорости течения сопротивление уменьшается, а в момент уменьшения скорости возрастает, то такое взаимодействие потока с сопротивлением приведет к раскачке системы. Проще всего представить себе это следующим образом. Разобьем все сопротивление на две составляющие — среднюю величину и переменное, периодическое во времени слагаемое. С точки зрения воздействия на поток переменная составляющая сопротивления будет то тормозить, то разгонять его. Если в момент увеличения скорости, связанного с возникшими акустическими колебаниями, переменная составляющая сопротивления будет дополнительно разгонять течение, а в момент уменьшения скорости — дополнительно тормозить его, то амплитуда акустических колебаний будет возрастать. Сопротивление в этом случае как бы раскачивает колебательную систему.

Устройства такого рода широко используются во всякого рода электронных схемах. Наиболее известным примером может служить ламповый генератор в котором сетка лампы играет роль переменного сопротивления описанного типа.

Возвращаясь к задаче о термическом возбуждении звука, следует прежде всего указать на сопротивление, которое способно дать описанный выше эффект. В идеализированной схеме процесса, положенной в основу изучения рассматриваемого типа акустических колебаний, не предполагается наличие каких-либо гидравлических потерь в трубе. Поэтому единственным видом сопротивления, которое надо учесть, является так называемое тепловое сопротивление, возникающее даже в идеальной жидкости.

Здесь не будет излагаться полная теория этого интересного явления; дадим лишь общее представление о тепловом сопротивлении, следуя Г. Н.



Абрамовичу. Пусть скорость течения в цилиндрической трубе настолько мала, что можно

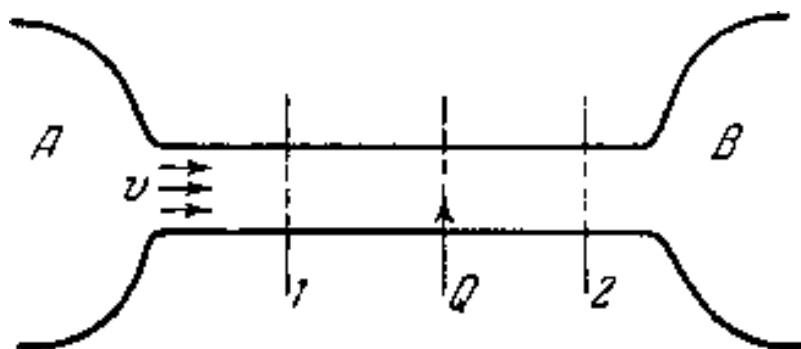


Рис. 1. Расчетная схема для вычисления теплового сопротивления.

что можно не учитывать влияния сжимаемости среды. Присоединим ко входу в трубу и к ее выходному сечению не связанные друг с другом резервуары *A* и *B* бесконечно большого объема (рис. 1). Сечение 1 является входным, сечение 2 — выходным; где-то между ними к потоку подводится тепло *Q*. Жидкость считаем идеальной, а потому никаких гидравлических потерь учитывать не будем. Параметры течения в сечениях 1 и 2 будем отмечать соответствующими индексами, а для резервуаров *A* и *B* введем индексы заторможенного течения 01 и 02 соответственно. Тогда согласно уравнению Бернулли

$$p_{01} = p_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2},$$

$$p_{02} = p_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2},$$

откуда изменение полного давления будет равно

$$p_{01} - p_{02} = p_1 - p_2 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} (1 - \rho_1 / \rho_2). \quad (1)$$

При написании последнего равенства было учтено уравнение неразрывности

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2.$$

Поскольку рассматривается несжимаемая жидкость, то изменение плотности возможно только за счет подогрева, причем естественно положить

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Тогда уравнение (1) может быть записано в следующей форме:

$$p_{01} - p_{02} = p_1 - p_2 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \quad (2)$$

Из уравнения импульсов можно определить падение давления на участке 1—2

$$p_1 - p_2 = \rho_1 v_1 (v_2 - v_1).$$

Подставив эту разность в равенство (2) и используя уравнение неразрывности и связь между плотностью и температурой, получим окончательную формулу

$$p_{01} - p_{02} = \frac{\rho_1 v_1^2}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right). \quad (3)$$

Равенство (3) показывает, что наличие теплоподвода  $Q$ , приводящего к тому, что  $T_2 \neq T_1$ , неизбежно связано с появлением разницы между полными напорами во входном и выходном сечениях цилиндрической трубы. Этот эффект и называется тепловым сопротивлением.

Попытаемся представить качественную картину возбуждения акустических колебаний теплоподводом за счет кинетической энергии течения. Из формулы (3) видно, что при  $T_2 > T_1$  (подогрев) сопротивление положительно (суммарная механическая энергия потока перед зоной теплоподвода  $P_{01}$  больше, чем аналогичная величина за зоной теплоподвода). При  $T_2 < T_1$  (охлаждение) сопротивление отрицательно. Таким образом, если теплоподвод будет колебаться около нуля, то на поток будет попеременно действовать то положительное, то отрицательное сопротивление. Если при этом увеличению скорости течения будет соответствовать уменьшение сопротивления, то, как уже говорилось, система будет раскачиваться.

Наличие среднего по времени постоянного теплоподвода не сможет изменить этой качественной картины возбуждения, подобно тому, как наличие среднего, не равного нулю теплоподвода не влияет на существо эффекта, указанного Рэлеем.

Описанный здесь механизм возбуждения ускользнул от внимания Рэлея. Принципиальная разница между обоими типами возбуждения акустических колебаний теплоподводом видна, в частности, из того, что в одном случае результат эффекта связан с фазовым сдвигом между теплоподводом и давлением, а в другом—между тепло- подводом и скоростью.

Качественные соображения, которыми мы обязаны Рэлею, и соображения о возможности возбуждения звука вследствие колебания теплового сопротивления требуют строгого доказательства. Этому будут посвящены последующие параграфы настоящей главы. Однако уже здесь уместно дать оценку доказательству критерия возбуждения акустических колебаний, данному Путнэмом и Деннисом. Указанные авторы сделали попытку получить общий аналитический критерий возбуждения акустических колебаний теплоподводом (выше уже делалась ссылка на эту работу в связи с изложением гипотезы Рэлея). В результате анализа полученных ими соотношений Путнэм и Деннис пришли к заключению, что единственным и вполне общим критерием возбуждения является критерий, предложенный Рэлеем.

Поскольку сам Рэлей не приводил доказательства своей гипотезы, после работы Путнэма и Денниса возникло убеждение, что гипотеза Рэлея доказана для самого общего случая. Однако в доказательстве Путнэма и Денниса допущена принципиальная ошибка в исходных положениях. Для упрощения уравнений Путнэм и Деннис пренебрегли скоростью течения по сравнению со скоростью звука и не заметили, что тем самым из рассмотрения исключен имеющий самостоятельное значение источник энергии — кинетическая энергия потока. Что касается неподвижного газа, то в нем действительно единственным механизмом возбуждения может быть механизм, указанный Рэлеем; сам Рэлей, как было подчеркнуто выше, тоже высказал свою гипотезу, рассматривая неподвижный газ, заключенный в цилиндре с поршнем. Таким образом, в ходе дальнейшего изложения надо обобщить критерий Рэлея на случай движущейся среды, дать другие возможные критерии и получить все эти результаты, исходя из основных законов механики сплошных сред. При этом, помимо выяснения

важного принципиального вопроса об источниках энергии автоколебаний, будут даны энергетические методы решения некоторых задач, отличающиеся большой простотой и наглядностью.

## 2. Поток акустической энергии.

Будем рассматривать следующую идеализированную схему процесса. Цилиндрическая труба  $AB$  делится областью  $\sigma$  на две части (рис. 2). Слева от области  $\sigma$  расположена входная часть трубы, по которой вправо движется

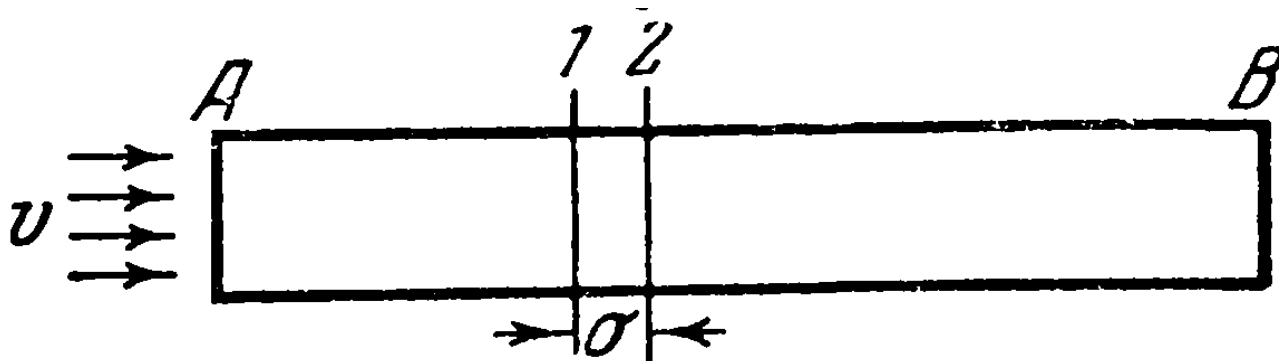


Рис. 16. Расчетная схема для вычисления потоков акустической энергии.

холодный газ. Область  $\sigma$  является областью теплоподвода. Здесь не будет уточняться, какой именно, физический или химический процесс приводит к подогреву газа, условимся только, что тепло сообщается одновременно и в одинаковых до всем молям газа, пересекающим данное неподвижное сечение, лежащее внутри  $\sigma$ . Это предположение позволяет считать течение одномерным и внутри  $\sigma$ . Так как тепло может подводиться в каждом сечении внутри области  $\sigma$ , то будем считать, что газ подогревается постепенно, по мере движения внутри этой области. Часть трубы, лежащая правее области  $\sigma$ , заполнена подогретым газом, движущимся к выходному концу  $B$ . На концах  $A$  и  $B$  рассматриваемой трубы выполняются некоторые краевые условия, которые пока уточняться не будут.

Поставим вопрос о том, при каких условиях и за счет каких источников происходит генерирование акустической энергии областью  $\sigma$ . Однако прежде чем отвечать на этот вопрос, надо установить, что именно следует понимать под потоком акустической энергии.

Как известно, поток энергии в одномерном газовом течении равен

$$\dot{E} = \rho v \left( \frac{v^2}{2} + c_v T \right) + p v. \quad (4)$$

Первое слагаемое, имеющее множителем  $\rho v$ , описывает перенос энергии потоком массы. Выражение в скобках показывает, что поток массы переносит энергию двух видов — кинетическую и внутреннюю. Первая из них является, как известно, одним из видов механической энергии, а вторая — тепловой. Последнее слагаемое формулы (3) описывает передачу энергии давлением; это тоже энергия, имеющая механическую форму.

Возбуждение акустических колебаний связано с передачей импульсов давлением и поэтому из трех слагаемых  $\dot{E}$  последнее слагаемое  $p v$  представляет основной интерес.

Пусть в газовом течении установились гармонические колебания

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \delta p, \quad \delta p = |\delta p| \sin \omega t, \\ v &= v_0 + \delta v, \quad \delta v = |\delta v| \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\varphi$  — фазовый сдвиг между колебаниями давления и скорости.

Тогда слагаемое  $p v$  в формуле для потока энергии (4) может быть представлено в виде

$$p v = p_0 v_0 + p_0 \delta v + v_0 \delta p + \delta p \delta v.$$

Интегрируя это равенство по времени за период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  и относя полученные величины к периоду, получим среднее значение потока  $p v$  за период

$$(p v)_{cp} = p_0 v_0 + \frac{1}{T} \int_0^T \delta v \delta p \, dT. \quad (6)$$

Из полученной формулы видно, что при установившихся гармонических колебаниях средний за период поток  $p v$  равен сумме двух потоков энергии. Поток  $p_0 v_0$  никак не связан с колебаниями, в то время как второе слагаемое правой части формулы (6) зависит только от колебательных составляющих  $p$  и  $v$ . Это слагаемое естественно назвать потоком акустической энергии  $A$

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T \delta v \delta p \, dT. \quad (7)$$

Рассмотрим некоторые, почти очевидные, свойства потока акустической энергии. Воспользовавшись выражениями (5), для  $\delta p$  и  $\delta v$  можно написать:

$$A = \frac{1}{2} |\delta p| |\delta v| \cos \varphi \quad (8)$$

Из формулы следует, что в узлах давления  $\delta p = 0$  или в узлах скорости  $\delta v = 0$  поток акустической энергии равен нулю. Это означает, что в среднем за период через сечение, в котором расположен узел  $\delta p$  или  $\delta v$ , акустическая энергия не перетекает. С этой точки зрения понятно, почему при наличии узлов давления или скорости на концах трубы можно говорить, что краевые условия не допускают излучения акустической энергии в окружающее пространство.

Равенство типа (8) удобно записывать в виде скалярного произведения векторов  $\delta p$  и  $\delta v$ . Как уже указывалось во втором параграфе, вариации переменных, которые обычно рассматриваются как комплексные величины, нередко удобно рассматривать в качестве векторов. Следовательно, формулу (8) можно записать в виде

$$A = \frac{1}{2} \delta p \delta v.$$

Пользуясь такой формой записи, легко убедиться, что для установившихся колебаний величина  $A$  сохраняется постоянной при переходе от сечения к сечению. Действительно, обратимся к переменным  $u$  и  $w$ . Если считать  $\delta p$  и  $\delta v$  векторами, то  $u$  и  $w$  также следует рассматривать не как комплексные величины, а как векторы. Но тогда

$$A = \frac{1}{8\rho_0 a} (u^2 - w^2). \quad (9)$$

Так как скалярные квадраты векторов совпадают с квадратами абсолютных величин, а абсолютные величины  $|u|$  и  $|w|$  в случае гармонических колебаний не меняются при переходе от сечения к сечению, величина  $A$  не может измениться с изменением координаты сечения.

Этот результат можно истолковать как свойство сохранения потока акустической энергии для установившихся колебаний при движении вдоль оси течения.

Из сказанного можно сразу сделать ряд важных выводов. Если при наличии узла скорости или давления в некотором сечении поток акустической энергии через это сечение равен нулю, то условие  $A=0$  должно оставаться справедливым и для других сечений. Но скалярное произведение может быть равным нулю лишь при условии ортогональности сомножителей (если ни один из них не равен нулю). Следовательно, при наличии узла  $\delta p$  или  $\delta v$  в некотором сечении и при установившихся колебаниях фазовый сдвиг между  $\delta p$  и  $\delta v$  во всех других сечениях равен  $\frac{\pi}{2}$ . Однако в настоящем разделе вывод об ортогональности  $\delta p$  и  $\delta v$  приобретает физическую наглядность и может быть обобщен в том смысле, что это условие будет справедливо не только при наличии узлов  $\delta p$  или  $\delta v$ , но и во всех тех случаях, когда вдоль трубы не происходит (в среднем за период) передачи акустической энергии.

В тех случаях, когда при установившихся колебаниях поток акустической энергии  $A$  отличен от нуля (например, когда на концах трубы происходит рассеивание акустической энергии), свойство сохранения  $A = \text{const}$  вдоль оси трубы остается справедливым. Из него, в частности, следует, что если абсолютные величины  $\delta p$  и  $\delta v$  меняются в зависимости от координаты  $\xi$  (стоячие волны), то это возможно лишь при соответствующем изменении фазового сдвига  $\psi$  между ними [формула (8)]. Кроме того, ясно, что в таком процессе нигде не может образоваться узлов  $\delta p$  или  $\delta v$ , так как это дало бы  $A=0$ .

Как видно из формулы (8), величина  $A$  может быть как положительной, так и отрицательной, знак ее зависит от угла  $\psi$ . Знак  $A$  говорит о направлении движения потока акустической энергии. Если акустическая энергия движется в положительном направлении, вправо, то  $A > 0$ , если влево, то  $A < 0$ .

Вернемся теперь к рис. 2. Сравнивая потоки акустической энергии на неподвижных плоскостях 1 и 2, ограничивающих область  $\sigma$ , поставим вопрос о количестве акустической энергии, «излучаемой» областью  $\sigma$ . Обозначим поток акустической энергии, пересекающий плоскость 1, через  $A'$ , а поток,

пересекающий плоскость 2, через  $A''$ . Тогда суммарное количество акустической энергии  $A_\Sigma$ , излучаемой областью  $\sigma$ , будет равно

$$A_\Sigma = A'' - A'. \quad (10)$$

Если вспомнить правило знаков, то  $A_\Sigma > 0$  означает, что энергия движется от области  $\sigma$ , если  $A_\Sigma < 0$ , то к области  $\sigma$ . В первом случае область  $\sigma$  генерирует акустическую энергию, во втором поглощает ее, при  $A_\Sigma = 0$  область  $\sigma$ , является нейтральной.

Пусть на концах трубы  $A$  и  $B$  потери акустической энергии равны —  $R_A + R_B$  соответственно. Знаки при  $R_A$  и  $R_B$  выбраны так, чтобы потери акустической энергии были связаны с ее движением из трубы  $A$   $B$  во внешнюю среду. Суммарные потери будут, очевидно, равны  $R = R_B - R_A$ . Тогда из энергетических соображений ясно, что при установившихся колебаниях

$$A_\Sigma = R \quad (11)$$

Если

$$A_\Sigma > R$$

или

$$A_\Sigma < R \quad (12)$$

то колебания не могут носить установившегося характера.

В первом случае можно говорить о возбуждении системы, а во втором — о гашении колебаний. Действительно, в первом случае зона  $\sigma$  излучает больше акустической энергии, чем ее могут рассеять потери на концах  $A$  и  $B$ . Следовательно, часть колебательной энергии накапливается в трубе, что должно вести к увеличению амплитуд колебаний, т.е. к возбуждению колебательной системы. Во втором случае процесс имеет противоположный характер. С этой точки зрения равенство (11) соответствует границе устойчивости.

Здесь следует оговориться, что поскольку выше был рассмотрен случай установившихся колебаний, и определение потока акустической энергии было раскрыто лишь для этого случая, точный смысл имеет только формула (11). Что



касается неравенств (12), то их следует рассматривать как полезные качественные критерии.

По величине  $A_{\Sigma}$  можно судить о поведении колебательной системы в целом. По слагающим  $A_{\Sigma}$  величинам  $A'$  и  $A''$  представляется возможность судить о процессах, происходящих слева и справа от  $\sigma$ , например на концах трубы. При установившихся колебаниях величины  $A'$  и  $A''$  постоянны для сечений, лежащих слева и соответственно справа от  $\sigma$ . Отличие  $A'$  и  $A''$  от нуля говорит о том, что от области  $\sigma$  к концам трубы или от концов трубы к области  $\sigma$  постоянно течет акустическая энергия. Если акустическая энергия течет от области  $\sigma$  к концам трубы (т.е. если  $A' < 0$ ;  $A'' > 0$ ), то это означает, что на концах трубы расположены поглотители этой энергии. Если акустическая энергия движется от концов трубы к области  $\sigma$  (т.е. если  $A' > 0$ ;  $A'' < 0$ ), то это означает, что на концах трубы происходят процессы непрерывной генерации акустической энергии, которая поглощается областью  $\sigma$ .

Охарактеризуем теперь несколько более подробно процессы, идущие внутри области теплоподвода  $\sigma$ . Обстоятельное изучение этого вопроса будет проводиться ниже, здесь достаточно будет отметить некоторые общие свойства этой зоны. Как уже говорилось, внутри области  $\sigma$  происходит теплоподвод. Область ограничена неподвижными плоскостями 1 и 2. В связи с процессами, идущими внутри  $\sigma$ , между плоскостями 1 и 2 происходит, вообще говоря, изменение всех параметров течения. Если ограничиться рассмотрением одних только возмущений параметров течения, то можно говорить, что  $\delta p$ ,  $\delta v$  и  $\delta s$  изменяются вдоль области  $\sigma$  не только в связи с наличием акустических колебаний, но и вследствие процесса теплоподвода, идущего внутри  $\sigma$ . Если считать расстояние между плоскостями, ограничивающими  $\sigma$ , малым по сравнению с длинами волн возмущений, так что волны возмущений, связанные с акустическими колебаниями, не могут заметным образом изменить своих амплитуд и фаз на расстоянии  $\sigma$ , то все изменение  $\delta p$ ,  $\delta v$  и  $\delta s$  между плоскостями 1 и 2 будет связано только с процессом теплоподвода.

Отметим индексами 1 все величины, соответствующие левой границе зоны  $\sigma$ , а индексами 2 — величины, соответствующие правой границе зоны  $\sigma$ . Тогда можно ввести следующие обозначения, при написании которых среднее значение давления в левой (холодной) части трубы принято равным  $p_1$  а средняя скорость звука —  $a_1$

$$\begin{aligned}\delta v_2 - \delta v_1 &= a_1 \delta E, \\ \delta p_2 - \delta p_1 &= \kappa p_1 \delta X, \\ \delta s_2 - \delta s_1 &= c_{p_1} \delta S.\end{aligned}\tag{13}$$

Примем, что область  $\sigma$  мала по сравнению с длиной волн возмущений. Тогда безразмерные величины  $\delta E$ ,  $\delta X$  и  $\delta S$  связаны только с процессом теплоподвода и их можно рассматривать как три параметра, описывающие некоторые суммарные свойства возмущенного процесса теплоподвода.

Вопрос о том, достаточны ли эти параметры для однозначного описания необходимых свойств зоны  $\sigma$ , и вопрос об их фактическом определении будет рассмотрен в следующей главе. Здесь достаточно указать на то, что введенные величины разумно описывают физические явления, происходящие в зоне теплоподвода. Величина  $\delta E$  характеризует расширение некоторого объема в связи с его нагреванием, величина  $\delta X$  — возникновение теплового сопротивления, а величина  $\delta S$  — неизбежное при подогреве изменение энтропии.

Обратимся теперь к вопросу об источниках энергии при термическом возбуждении звука. Будем по-прежнему считать, что протяженность зоны  $\sigma$  мала и поэтому к процессам, идущим внутри нее, можно применять гипотезу стационарности, т.е. считать, что внутри  $\sigma$  все явления описываются уравнениями, справедливыми для стационарных течений. Это можно пояснить так. Малость  $\sigma$  по сравнению с длинами волн возмущений означает медленность акустических колебаний по сравнению со скоростью протекания процессов в короткой области  $\sigma$ . Поэтому время, достаточное для того, чтобы внутри области  $\sigma$  произошли изменения и процесс установился, недостаточно

для сколько-нибудь заметного изменения параметров течения вне ее, изменения, связанного с акустическими колебаниями. Процессы внутри  $\sigma$  как бы мгновенно «подстраиваются» к сравнительно медленным акустическим колебаниям.

Рассмотрим - пересечение области  $\sigma$  элементом течения. Если написать закон сохранения энергии отдельно для элемента потока в системе отсчета, движущейся вместе с ним, и отдельно для центра тяжести этого элемента, то, используя уравнение неразрывности, нетрудно получить следующие равенства:

$$Q = \rho v c_v (T_2 - T_1) + \int_{\sigma} p dv, \quad (14)$$

$$P = \rho v \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) + \int_{\sigma} v dp. \quad (15)$$

Здесь  $Q$  — тепло,  $P$  — механическая энергия, подведенные к газу в области  $\sigma$ . Хотя в рассматриваемом случае  $P = 0$ , сохраним эту величину в формулах для большей общности получаемых результатов.

Очевидно, что разность полных потоков энергии (4) между плоскостями 1 и 2 равна

$$\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1 = Q + P,$$

а

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 = \int_{\sigma} p dv + \int_{\sigma} v dp. \quad (16)$$

Таким образом, составляющая потока энергии, «излучаемая» областью  $\sigma$  и равная  $p_2 v_2 - p_1 v_1$ , состоит из двух слагаемых. Первое из них связано с теплоподводом и изменением внутренней энергии (14), а второе — с подводимой механической энергией и изменением потока кинетической энергии (15).

Пусть величины  $p$  и  $v$  имеют гармонически изменяющиеся во времени составляющие  $\delta p$ ,  $\delta v$  (5), причем период колебаний равен  $T$ . Тогда средняя акустическая энергия, излучаемая областью  $\sigma$ , запишется в виде

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T (\delta p_2 \delta v_2 - \delta p_1 \delta v_1) dt. \quad (17)$$

На основании равенства (16) можно написать

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \int_{\sigma} \delta p d\delta v + \int_{\sigma} \delta v d\delta p \right] dt. \quad (18)$$

Величины, стоящие в скобках в равенствах (17) и (18), уже не являются гармоническими функциями времени.

Обозначив символом  $A$  периодические, но не гармонические составляющие, имеющие порядок  $\delta^2$ , напомним с использованием (13) и (14):

$$\int_0^T \left[ \int_{\sigma} \delta p d\delta v \right] dt = \int_0^T \Delta [Q - \rho v c_v (T_2 - T_1)] dt, \quad (19)$$

$$\int_0^T \left[ \int_{\sigma} \delta v d\delta p \right] dt = \int_0^T \Delta \left[ P - \rho v \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \right] dt. \quad (20)$$

Выше уже говорилось, что при термическом возбуждении звука механическая энергия к потоку не подводится и поэтому  $P = 0$ .

Воспользовавшись равенствами (18) — (20) и положив  $P = 0$ , получим следующее выражение для потока акустической энергии, излучаемой областью  $\sigma$ :

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \Delta Q - \Delta \rho v c_v (T_2 - T_1) - \Delta \rho v \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \right] dt.$$

Выражение для  $A_{\Sigma}$  показывает, что акустические колебания могут поддерживаться за счет трех источников энергии — внешнего теплоподвода, потока внутренней энергии и потока кинетической энергии. Однако формула (14) говорит о том, что первые два источника родственны друг другу. Поэтому ниже будут рассматриваться только два источника энергии. Будем говорить, что энергия акустических колебаний может заимствоваться из тепловых членов (теплоподвод и внутренняя энергия) и из потока кинетической энергии.

### Вопросы:

1. Что подразумевают под двумя источниками энергии, когда говорят про термические возбуждения звука.
2. Гипотеза Рэля.
3. Рассчитать поток акустической энергии.

## **Информационные источники**

### **Основная литература:**

1. Автоколебания газа в установке с горением. В.М. Ларионов, Р.Г. Зарипов / Изд-во казан. гос. техн. ун-та, 2003.
2. Теория термических автоколебаний. Р.Г. Галиуллин, И.П. Ревва, Г.Г. Халимов / Издательство казанского университета, 1982.
3. Вибрационное горение. Б.В. Раушенбах / Издательство казанского университета, 1982.

### **Дополнительная литература:**

4. Автоколебательные системы. Теодорчик К.Ф. / М.;Л.: ГИТТЛ, 1952. 271 с.
5. Физические основы рабочих процессов в камерах сгорания ВРД. Б.В. Раушенбах / М.: Машиностроение, 1964. 347с.
6. Термоакустическая устойчивость. К.И. Армаков / М.: Машиностроение, 1982, 261с.
7. Журнал «Авиационная техника»
8. Журнал «Физика горения и взрыва»
9. Акустический журнал

### **Интернет-ресурсы:**

- 10.Официальный сайт журнала «Авиационная техника» - <http://kai.ru/aviatech/>
- 11.Официальный сайт журнала «Физика горения и взрыва» - <http://www.sibran.ru/journals/FGV>
- 12.Официальный сайт Акустического журнала [http://www.akzh.ru/htm/1963\\_2.htm](http://www.akzh.ru/htm/1963_2.htm)

## Глоссарий

**Автоколебания** — незатухающие колебания в диссипативной динамической системе с нелинейной обратной связью, поддерживающиеся за счёт энергии постоянного, то есть непериодического внешнего воздействия.

**Адиабатический**, или **адиабатный процесс** (от др.-греч. ἀδιάβατος — «непроходимый») — термодинамический процесс в макроскопической системе, при котором система не обменивается теплотой с окружающим пространством.

**Акустический импеданс** - акустическое сопротивление среды, представляющее собой отношение комплексных амплитуд звукового давления к колебательной объёмной скорости.

**Вибрационное горение** — вид неустойчивого **горения**, характеризующий автоколебаниями газа в камере сгорания.

**Волновое уравнение** в математике — линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее малые поперечные колебания тонкой мембраны или струны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах (акустика, преимущественно линейная: звук в газах, жидкостях и твёрдых телах) и электромагнетизме (электродинамике). Находит применение и в других областях теоретической физики, например при описании гравитационных волн. Является одним из основных уравнений математической физики.

**Вязкость (внутреннее трение)** — одно из явлений переноса, свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. В результате работа, затрачиваемая на это перемещение, рассеивается в виде тепла.

**Гармонические колебания** — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по синусоидальному или косинусоидальному закону.

**Граничные условия** — дополнение к основному условию, задающее его поведение на границе рассматриваемой области.

**Горение** — сложный физико-химический процесс превращения исходных веществ в продукты сгорания в ходе экзотермических реакций, сопровождающийся интенсивным выделением тепла. Химическая энергия, запасённая в компонентах исходной смеси, может выделяться также в виде теплового излучения и света. Светящаяся зона называется фронтом пламени или просто пламенем. **Идеальный газ** — математическая модель газа, в которой в рамках молекулярно-кинетической теории предполагается, что: 1) потенциальной энергией взаимодействия частиц, составляющих газ, можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией; 2) суммарный объём частиц газа пренебрежимо мал; 3) между частицами не действуют силы притяжения или отталкивания, соударения частиц между собой и со стенками сосуда абсолютно упруги; 4) время взаимодействия между частицами пренебрежимо мало по сравнению со средним временем между столкновениями.

**Звуковая энергия** - энергия колебаний частиц среды, переносящей звуковые волны; единица измерения в Международной системе единиц (СИ) — джоуль (Дж).

**Критерий Рэлея** – фазовое условие самовозбуждения термоакустических колебаний газа.

Профессор **Казимир Францевич ТЕОДОРЧИК** /1891-1968 гг./ плодотворно работал в Московском университете около пятидесяти лет, начиная с 1919 г. по 1968 г. Вся основная его педагогическая и научная деятельность связана с физическим факультетом МГУ.

К.Ф. Теодорчик один из создателей научной школы, разрабатывающей проблемы колебаний в нелинейных и линейных системах самой различной физической природы. Он был блестящим ученым, педагогом и лектором. Много сил и энергии уделял он подготовке и воспитанию высококвалифицированных научных кадров в различных областях физики и, особенно, в области физики колебаний и радиофизики.

К.Ф. Теодорчик работал в МГУ с 1919г., сначала на кафедре физики физико-математического факультета, затем на кафедре колебаний физического факультета МГУ, с момента её создания в 1931 г., до своей смерти в 1968 г. Семнадцать лет, с 1939 по 1956 гг., он заведовал этой кафедрой.

**Нагреватель** — устройство для нагревания (обогрева) чего-либо.

**Поток звуковой энергии, акустическая мощность** — величина, равная отношению звуковой энергии  $dW$ , переносимой упругой средой через заданную поверхность, к интервалу времени  $dt$ , за который эта энергия переносится.

**Поток звуковой энергии, акустическая мощность** — величина, равная отношению звуковой энергии  $dW$ , переносимой упругой средой через заданную поверхность, к интервалу времени  $dt$ , за который эта энергия переносится.

**Резонатор** — колебательная система, в которой происходит накопление энергии колебаний за счёт резонанса с вынуждающей силой. Обычно резонаторы обладают дискретным набором резонансных частот. В технике обычно встречаются резонаторы с колебанием электромагнитных или механических величин. Конструкция резонатора сильно зависит от его резонансных частот.

**Резонатор Гельмгольца** (акустический резонатор) — акустический прибор, сосуд сферической формы с открытой горловиной. Изобретен Гельмгольцем около 1850 г. для анализа акустических сигналов, теория разработана Г. Гельмгольцем и Дж. Рэлеем (см. Резонанс Гельмгольца).

**Температура горения** – это температура до которой в процессе горения нагреваются продукты сгорания.

**Теплопроводность** — это процесс переноса внутренней энергии от более нагретых частей тела (или тел) к менее нагретым частям (или телам), осуществляемый хаотически движущимися частицами тела (атомами, молекулами, электронами и т. п.). Такой теплообмен может происходить в любых телах с неоднородным распределением температур, но механизм переноса теплоты будет зависеть от агрегатного состояния вещества.



**Топочный объем** (англ. *furnace volume*) — пространство, ограниченное полом камеры сжигания, огнеупорными стенами, теплопоглощающими стенками камеры сгорания с циркулирующей водой, а также поверхностью свода, полами пластинами или водогрейными трубами котла. При наличии поперечной (шиберной) стенки, установленной в топке, топливный объем уменьшается на ту часть, которая находится за этой стенкой.

**Труба Рийке** является простейшей экспериментальной установкой для изучения термоакустической неустойчивости, которая основана на возникновении колебаний газа в трубах при подводе тепла.

**Труба Рийке** является простейшей экспериментальной установкой для изучения термоакустической неустойчивости, которая основана на возникновении колебаний газа в трубах при подводе тепла.

**Эффекта Зондхаусса** - возбуждение звука в трубе, к которой снаружи или изнутри подводится тепло при отсутствии потока через полость трубы.

## Вопросы к экзамену

1. Что такое вибрационное горение.
2. Какие установки вибрационного горения Вы можете назвать.
3. Приведите пример вибрационного горения.
4. Классификация вибрационного горения.
5. Отрицательные и положительные стороны вибрационного горения.
6. Колебания газа в трубах с учетом продольного градиента температуры.
7. Установка типа емкость–труба, резонатор Гельмгольца.
8. Потери акустической энергии.
9. Получить обобщенное условие, связывающее акустические возмущения на границах области теплоподвода в трубе и устройствах типа емкость–труба.
10. Рассчитать акустическую мощность тепловых источников.
11. Провести анализ самовозбуждения звука в трубе Рийке.
12. Провести анализ поющего пламени Хиггинса.
13. В чем особенности данного эффекта?
14. Описать эксперимент.
15. Произвести теоретический расчет эффекта Рийке.
16. Что представляет собой резонатор Гельмгольца.
17. Произвести расчет резонатора Гельмгольца.
18. Особенности эффекта Зондхаусса.
19. Произвести расчет акустической энергии.
20. Произвести расчет эффекта Зондхаусса.
21. Что подразумевают под двумя источниками энергии, когда говорят про термические возбуждения звука.
22. Гипотеза Рэля.
23. Рассчитать поток акустической энергии.